1er. congreso Internacional de Innovación Educativa
La cultura de la innovación en la educación
del 4 al 7 de julio 2006

ANÁLISIS DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Martha Patricia Jiménez Villanueva, ESCOM - IPN
Hugo Rogelio Mejía Velasco, CINVESTAN – IPN
Karina Viveros Vela, ESCOM – IPN
Gelacio Castillo Cabrera, ESCOM - IPN

Resumen

En el departamento de Matemática de la Escuela Superior de Cómputo del IPN se han realizado investigaciones para detectar los obstáculos que pueden producirse por la manera como se enseña o por la complejidad del concepto por aprender. En particular el concepto de límite de una función presenta una gran dificultad para su enseñanza y para su aprendizaje, sin embargo su tratamiento es obligado y fundamental para introducir conceptos como: continuidad, derivada e integral.

El presentar este concepto a partir de su definición formal es muy difícil de entender para los estudiantes de un primer curso de cálculo, su complejidad es tal que a menudo se hace analizando funciones algebraicas elementales.

No obstante con el estudio y análisis de diferentes formas de enseñanza - aprendizaje y la introducción de estas nuevas formas en las instituciones de educación superior, el proceso de enseñanza aprendizaje ha sufrido un cambio importante en el sentido, de que deja de ser estática y de algún modo rigurosa convirtiéndose en dinámica dándole un sentido distinto al rigor.

De acuerdo al Nuevo Modelo Educativo cuya característica principal es el estar basado en el aprendizaje que proporcione una sólida formación que facilite el aprendizaje autónomo, se diseñaron actividades que permitan analizar el concepto de límite de una función por medio de un aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión. Esto permitirá que el estudiante deje de ser un receptor de los conocimientos y participe de manera activa en la construcción de los conceptos.

Palabras Claves: Aprendizaje autónomo, aprendizaje cooperativo, rigor matemático, debate científico y autorreflexión, construcción del conocimiento.

Marco teórico

Se han realizado muchas investigaciones para identificar las dificultades que se presentan en la enseñanza - aprendizaje del concepto de límite (Sierpinska, 1985, 1987 y 1988; Hitt y Lara, 1999; Paéz 2001), algunas de estas dificultades están asociadas con la complejidad de los conceptos y otras tienen que ver con la forma con la que se tratan los conceptos dentro del aula.

La complejidad de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite se ve reflejada en los resultados de varias investigaciones, por ejemplo, en el estudio realizado por Hitt y Lara (1999) con profesores de una institución de enseñanza media, reportan que algunas de las dificultades de aprendizaje del concepto de límite se deben a la forma como se enseña, ya que en la enseñanza tradicional de la matemática básica se considera que hay un mayor nivel cuando el contenido generalmente se desenvuelve en el registro algebraico. En consecuencia, se le exige al alumno aprender algoritmos, para resolver los ejercicios rutinarios de límites. De esta forma los profesores inducen que los estudiantes desarrollen la idea de límite como una simple sustitución.

Anna Sierpinska (1985)

El objetivo de su investigación es descubrir los obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite. Su estudio está dividido en dos etapas, separadas por un periodo de dos semanas, y se realizó con 4 estudiantes divididos en grupos de dos (receptor y emisor), clasificados como "buenos estudiantes".

De acuerdo a los resultados que obtuvo en esta investigación clasifica los obstáculos en cinco categorías:

1. "Horror infiniti".
2. Los obstáculo ligados a la noción de función.
3. Los obstáculos "geométricos".
4. Los obstáculos "lógicos.
5. Los obstáculos "simbólicos".

Páez (2001)

En la primera fase de la investigación aplicó un cuestionario de límites usando diferentes registros de representación a 33 estudiantes de la Escuela Superior de Física y Matemáticas, Algunos de los resultados reportados son:

- Los estudiantes tienen tendencia a evadir las representaciones geométricas y presentan problemas congnitivos.
- Algunos estudiantes piensan que el límite siempre debe existir y que sólo necesitan encontrar el método apropiado para determinarlo.
- Algunos de los problemas que presentan los alumnos, se deben a que no han estructurado el concepto de función.
- La mayoría de los estudiantes no han construido un adecuado concepto de límite, debido a su inhabilidad de coordinación libre de contradicciones, diferentes representaciones del objeto matemático.
- El infinito genera contradicciones en el alumno.

Páez (2001)

En la segunda fase de la investigación se diseñaron actividades las cuales se trabajaron con veintidós estudiantes-profesores. Algunos resultados reportados son:

- Los alumnos utilizan la idea de límite como frontera, como algo que delimita, limite a no sobrepasarse.
- Los alumnos presentan la idea dinámica del límite, es decir el límite es el valor al cual nos aproximamos.
- Conflictos en cuanto si al límite es alcanzado o no, predominando el carácter inalcanzable.
- Los alumnos rara vez realizan una conexión entre los ejemplos y la definición del límite
- Predomina la idea del infinito potencial.
- El cálculo de límite se reduce a una simple sustitución y cuando tienen alguna indeterminación se debe realizar algún truco.
- Se les dificulta la lectura de gráficas, por lo que ofrecen resistencia para trabajar con estas representaciones.
- Se tiene preferencia por lo algebraico.

Dada la importancia del estudio del concepto de límite para entender conceptos como derivada, integral, etc. así como la dificultad para enseñarlo y aprenderlo, elaborar actividades de aprendizaje no es tarea fácil, es necesario elegir muy bien los problemas y el orden de los mismos para que nos lleven al objetivo deseado.

Considerando que la educación “es un proceso por el cual la sociedad transmite a un nuevo miembro los valores, creencias, conocimientos y expresiones simbólicas” y como parte integrante de una comunidad académica con participación activa dentro del quehacer docente, tenemos la responsabilidad como profesores de matemática de buscar nuevas formas de enseñanza-aprendizaje, con el fin de que los alumnos se apropien del conocimiento. Sin embargo, un reto mayor es aplicar estas formas de enseñanza en el salón de clases, donde el número de alumnos es grande y el tiempo para analizar todo el temario es corto.

Es importante tener presente que, para acceder a un objeto matemático se debe hacer a través de las representaciones semióticas y como cada representación es parcial con respecto a lo que representa, es absolutamente necesario la interacción entre las diferentes representaciones para la formación del concepto. Por tal motivo, esta propuesta de enseñanza-aprendizaje, del concepto de límite, se hará introduciendo diferentes registros de representación del mismo y tareas de conversión.

En la Escuela Superior de Cómputo del IPN aproximadamente el 60% de los alumnos de primer semestre reprueban la materia de cálculo I, por lo que una mis preocupaciones como profesora de esta escuela es analizar nuevas formas de enseñanza–aprendizaje que pudieran ayudar a disminuir este índice de reprobación.

Lo anterior sugiere la necesidad de buscar nuevas estrategias de enseñanza que influyan de manera significativa en el aprendizaje de los estudiantes.

Características de las actividades de aprendizaje del concepto de límite de una función.

Para elaborar la propuesta se tomaron en cuenta las preguntas siguientes:

- ¿Qué tipo de ejemplos y ejercicios se deben presentar para enseñar el concepto de límite?.
- ¿En qué orden se deben presentar estos ejemplos?.
- ¿Qué ejemplos pueden permitir a los estudiantes establecer la diferencia entre el infinito actual y el infinito potencial?.

La propuesta de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite se plantea a través de actividades, ésta se caracteriza por que:

- ✓ El concepto de límite se introduce usando sucesiones en lugar de funciones.
- ✓ El rigor del concepto de límite está prácticamente ausente.
- ✓ Se analiza el concepto en los diferentes registros de representación (tabular, algebraico y tabular).
- ✓ Se plantean problemas de aplicación y problemas no rutinarios.
- ✓ El alumno contesta las actividades planteadas en base a sus conocimientos previos.
- ✓ Se crea un ambiente de discusión y análisis de la actividad.
- ✓ Se motiva a la autorreflexión.

Metodología

El estudio comprende dos etapas tomando en cuenta los obstáculos del tiempo empleado para impartir el tema así como la cantidad de alumnos que toman el curso. En la primera etapa se experimentó con el 50% de alumnos que normalmente tiene un grupo y se hizo un registro del tiempo que se necesita para impartir el tema, así como el análisis de los ejercicios presentados en cada una de las actividades, cuyos resultados se reportan en este documento). En la segunda etapa, se implementarán estas actividades, modificadas de acuerdo a los resultados obtenidos en la primera etapa, en un salón normal de clases.

Para lograr el objetivo anterior se llevaron a cabo las siguientes acciones:

- ✓ Presentar el concepto de límite por medio de actividades usando diferentes registros de representación (tabular, gráfico y algebraico) en el que el alumno participe de manera activa.
- ✓ Analizar si los estudiantes pueden establecer la articulación entre los diferentes registros de representación del concepto del límite.
- ✓ Analizar si con estas actividades el estudiante puede establecer la diferencia entre el infinito actual y el infinito potencial.

Sujetos de estudio

Después de impartir el tema de funciones considerando los diferentes registros de representación, se aplicó un cuestionario sobre el tema de funciones a 60 alumnos de primer semestre de la ESCOM-IPN, de ellos fueron seleccionados 20 alumnos los cuales obtuvieron las mejores calificaciones en este cuestionario (calificación entre 7 y 10). El objetivo de esta selección es que los alumnos manejen un poco el tema de funciones, y este influya, lo menos posible en el entendimiento del tema de límite de una función.

El tiempo máximo para realizar cada actividad es de 90 minutos, ya que las sesiones de clase en esta escuela están estructuradas de esta manera y de acuerdo al plan de estudios de la asignatura de cálculo I que contempla 15 horas para enseñar el tema de *"***límite de una función***"*.

Diseño experimental

Fase 1: Diseño del cuestionario de selección: En esta primera fase del proyecto, se realizó una selección cuidadosa de las preguntas que se deberían incluir en el cuestionario, de tal forma que en ellas estuvieran presentes las diferentes representaciones (gráfica, numérica y algebraica) de una función, es importante señalar que algunas preguntas se tomaron de cuestionarios aplicados en investigaciones anteriores.

Fase 2: Diseño de las actividades: Se realizó un análisis de algunas actividades que se habían implementado en investigaciones pasadas y se seleccionaron algunas de ellas para aplicarse en esta investigación modificándolas de acuerdo al objetivo planteado, teniendo cuidado del orden en que se presentarían así como el contenido de las mismas. En total se diseñaron 10 actividades y sólo se implementaron 8 actividades en la sesión de clases debido al tiempo que estas tomaron para su desarrollo.

Fase 3: Recolección de datos

La fase de recolección de la información se realizó durante un semestre. La información recolectada se llevó a cabo de la siguiente manera.

Sesión de clases: La sesión de clases estaba dividida en dos partes. En la primera parte los estudiantes realizaban las actividades en parejas (40 minutos), se les sugirió a los alumnos usar pluma para contestar sus actividades y si cambiaban de opinión que no borraran si no que escribieran abajo las nueva ideas. En la segunda parte una pareja expone sus respuestas, si hay respuestas diferentes a la dada por la pareja que expone, estas son explicadas por las parejas correspondientes y el profesor interviene para aclarar dudas.
Durante la exposición una persona externa a la clase tomaba nota de la explicación de la pareja que exponía, de las intervenciones de los demás alumnos, así como de las preguntas realizadas por el profesor.

Fase 4: diseño del examen.

En esta fase de la investigación se procedió a realizar una selección cuidadosa de las preguntas que se deberían incluir en el examen, de tal forma que en ellas estuvieran presentes diferentes representaciones (gráfica, numérica y algebraica) que nos permitieran determinar si los alumnos habían de alguna manera entendido el concepto de límite de una función.

Fase 5: Análisis de las actividades.

Para realizar el análisis de las respuestas dadas en las actividades se determinó el porcentaje de los aciertos, errores y dificultades en cada pregunta.

Resultados y conclusiones

En este artículo se reportan los resultados de una de las actividades planteadas

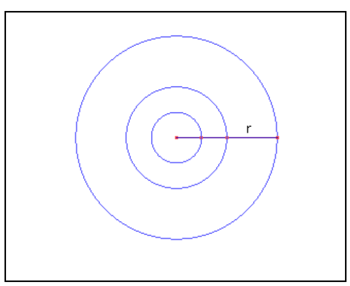
ACTIVIDAD No. 2
LIMITE DE UNA SUCESIÓN

Nombre: ____

Fecha: ______________________

Sobre un círculo de radio r, dibuje otro círculo concéntrico de radio $\frac{r}{2}$. Dibuje otro círculo concéntrico a los anteriores de radio $\frac{r}{4}$ y así sucesivamente.

1.- ¿Qué sucede con las áreas de los círculos? Justifique su respuesta.



2. ¿Hay alguna sucesión que te pueda ayudar a resolver el problema analíticamente?
3. Si la respuesta es afirmativa, escríbela .
4. ¿Qué otras sucesiones se pueden formar en este problema?

Objetivos de la actividad:

- ✓ Enfrentar a los alumnos con la idea de infinito.
- ✓ Que el alumno estudie las sucesiones en su representación gráfica y algebraica.

EXPUSO PAREJA 2

Pregunta 1: ***¿Qué sucede con las áreas de los círculos? Justifique su respuesta.***
Respuesta
Pareja 2.1: Disminuye al cuadrado de lo que disminuye el radio.
Profesora: ¿Podrían explicarnos?
Pareja 2.2: El radio disminuye a la mitad y el área de un círculo depende del cuadrado del radio por lo tanto, si el radio disminuye el área también disminuye.
Profesora: ¿Qué pasa con el círculo?
Pareja 2.2: bueno!!! como el radio va disminuyendo, entonces el círculo se va haciendo mas pequeño. Empieza a dibujar los círculos, y dice ya no puedo dibujar más por que no se aprecian por el grosor del marcador, pero... sabemos que el radio sigue disminuyendo y por lo tanto los círculos se hacen cada vez más pequeños.
Pareja 1.1: Si se trabaja de manera analítica, vemos que el área del círculo siguiente se reduce en un factor de ¼ con respecto al área del círculo anterior.

Área inicial = A_1, $A_2 = \frac{1}{4} A_1$, $A_3 = \frac{1}{4} A_2$, $A_4 = \frac{1}{4} A_3$, …, $A_n = \frac{1}{4} A_{n-1}$.

De esta manera ... observamos que el área del círculo se va haciendo cada vez más pequeña, aunque no podamos ver los círculos por las limitaciones del marcador.
Profesora: ¿Qué tan pequeña?
Pareja 3.1: Tiende a cero (sin justificación)
Pareja 4, 5 y 8: Van decreciendo, el área de un círculo de radio menor es menor.
Como el radio tiende a cero y el área depende del radio ésta también tiende a cero.
Pareja 6 y 7: Disminuye proporcionalmente. Hasta aproximarse a cero.

$$a_1 = \pi r^2,\ a_2 = \frac{\pi r^2}{4},\ a_3 = \frac{\pi r^2}{16},\ a_4 = \frac{\pi r^2}{64},\ \ldots,.$$

P4areja 7.1: Maestra, esta serie se podría expresar de manera general de la siguiente forma

$a_n = \dfrac{\pi r^2}{\left(2^{n-1}\right)^2}$ y escrita así podemos ver que... si *n* es muy grande el área que se obtiene es casi cero.
Profesora: ¿Cuál es el área si se lleva el proceso al infinito?
Pareja 7.1: Bueno... como el radio del círculo se hace cada vez más pequeño en el infinito se tendría un punto, es decir ... un círculo de radio cero y se tendría que el área del círculo es cero.
Profesora: ¿Es cero o casi cero?
Pareja 7.2: es cero.
Profesora: Su conjetura es que ¿ El círculo en un proceso infinito es un punto?
Pareja 7.2: Bueno...
Pareja 3.1: Tiende a un punto, por tanto el área tendería a cero. , pero... no podría ser exactamente cero.
Profesora: ¿Qué opinan?
Pareja 6.2: Vemos que ... si el radio se divide una, otra vez y otra vez y, realizamos este proceso un número infinito de veces .... no significa que hayamos terminado, por lo que el radio no sería cero y por lo tanto como no hemos terminado no tenemos una figura final y la última

que hemos realizado no sería un punto.
Pareja 4.1: Estoy confundido, La pareja 7, dice que en el infinito se tiene un punto y la pareja 6 dice que tiende a un punto.
Profesora: Pareja 7 ¿Podrían aclararnos su postura?
Pareja 7.1: Bueno...pues... yo también estoy confundido, por que el radio se podría seguir dividiendo y dividiendo y siempre habría un radio diferente de cero, por lo que se tendría un círculo muy chiquito.
Profesor: ¿Alguien tiene otra opinión?
Respuesta única, no.
Pregunta 2) *¿Hay alguna sucesión que te pueda ayudar a resolver el problema analíticamente?*
Respuesta
Pareja 2.1: Sí.
Profesor: Podrías escribirla?
Pareja 2.1: Supusimos un radio inicial de 8, y

Si $r_1 = 8$ $\quad A_1 = 64\pi$ $\quad$ Si $r_2 = \frac{8}{2} = 4$ $\quad A_2 = 16\pi$

Si $r_3 = 2$ $\quad A_3 = 4\pi$ $\quad$ Si $r_4 = 1$ $\quad A_4 = \pi$ $\quad$ Y así sucesivamente.

Profesora: ¿Por qué eligieron 8?
Pareja 2.2: Por que ... teníamos que dividir y no queríamos trabajar con fracciones.
Profesora: ¿Por eso se pararon en $r_4 = 1$?
Pareja 2.2: Sí, además con esos primeros elementos de la sucesión podíamos ver el comportamiento del área.
Profesora: ¿Podrían trabajar de manera general?
Pareja 1.1: Sí , supusimos que

$$A_1 = \pi r^2,\ A_2 = \frac{\pi r^2}{4},\ A_3 = \frac{\pi r^2}{16},\ A_4 = \frac{\pi r^2}{64}, \ldots, A_n = \frac{\pi r^2}{4^{n-1}}$$

y podemos observar que $A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > A_5 > \ldots > A_n$.
Pareja 3.1: Nosotros también trabajamos de manera general, pero expresamos el n-ésimo término de otra forma.
Profesora: Escríbela en al pizarra, por favor.
Pareja 3: Bueno, también supusimos que

$$a_1 = \pi r^2, \qquad a_2 = \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{a_1}{4},$$

$$a_3 = \pi\left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{16} = \frac{a_1}{16}, \qquad a_4 = \pi\left(\frac{r}{8}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{64} = \frac{a_1}{64},$$

$$a_5 = \pi\left(\frac{r}{16}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{(16)^2} = \frac{a_1}{(16)^2}, \qquad a_n = \pi\left(\frac{r}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{\left(2^{n-1}\right)^2} = \frac{a_1}{\left(2^{n-1}\right)^2}$$

Pero vemos que son la misma, sólo que nosotros tomamos el cuadrado sin desarrollar, de todas maneras se obtienen los mismos valores, esto sólo nos indica que podemos representar una sucesión de varias formas, dependiendo de nuestra álgebra.
Profesora: ¿Tienen alguna respuesta diferente?

Pareja 4 y 5: No, trabajamos de manera general y obtuvimos la misma sucesión que la pareja 1.

Pareja 6.1: Maestra, nosotros trabajamos con el radio, $r_n = \frac{r}{2^{n-1}}$, vemos que el radio disminuye por tanto es lógico que el área del cí rculo también disminuya.
Pareja 8.1: Maestra, nosotros supusimos que el radio vale uno, entonces el radio varía de la siguiente manera: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{\text{n-1}}}$ (Sucesión de radios). Al variar los radios de esta manera las áreas también varían : π, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{64}, \ldots, \pi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$, nos damos cuenta que particularizamos el problema pero esto nos ayudo a encontrar la solución que buscábamos.

***Pregunta** 4)* **¿Qué otras sucesiones se pueden formar en este problema?**
Respuesta
Pareja 2.1: Cualquier cosa que dependa del radio (sólo eso escribe en sus notas).
Profesora: Por ejemplo.
Pareja 2.1: El perímetro.
Pareja 5,7 y 8: Estamos de acuerdo (no escriben nada en sus notas).
Profesora: ¿Alguna respuesta diferente?
Pareja 1.1: Dimos una sucesión de radios.

$a_1 = r$, $a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} r$,

$a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} r) = \frac{1}{4} r$, $a_4 = \frac{1}{2} a_3 = \frac{1}{2} (\frac{1}{4} r) = \frac{1}{8} r, \ldots$,

$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} = \frac{1}{2} (\frac{1}{2^{n-2}} r) = \frac{1}{2^{n-1}} r$,

El radio se reduce en un factor de $\frac{1}{2}$, y las áreas se reducen en un factor de $\frac{1}{4}$, es decir, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Por lo tanto si el radio se reduce en un factor de $\frac{1}{n}$ las áreas se reducen en un factor de $\left(\frac{1}{n}\right)^2$.
Pareja 3, 4, 6: Dieron sucesiones para

Perímetro $\left(2\pi r,\ \pi r, \frac{\pi r}{2}, \ldots, \frac{2\pi r}{2^{\text{n-1}}} \right)$ Diámetro $\left(2r,\ r, \frac{r}{2}, \frac{\text{r}}{4} \ldots, \frac{2r}{2^{\text{n-1}}} \right)$

Radio $\left(r, \frac{r}{2}, \frac{r}{4}, \ldots, \frac{r}{2^{\text{n-1}}} \right)$

Conclusiones

De las respuestas dadas podemos observar que en los alumnos predomina la idea de imaginar el infinito como un proceso que no termina, que siempre se puede hacer un paso más, esto es, consideran el infinito potencial. Se niegan a imaginar la posibilidad de considerar el proceso al infinito como un proceso terminado, ratificando el hecho de que el límite no es alcanzado, esta forma de entender el límite surge de manera natural en la discusión misma del concepto prevaleciendo una idea dinámica del límite considerándolo inalcanzable. En el lenguaje común el límite lo consideran como una frontera, como algo que ya no puede pasar de ahí.

Todos estos obstáculos que se presentan ya han sido reportados por muchos autores, la finalidad de esta investigación es buscar nuevas estrategias de enseñanza para que de alguna manera los alumnos pueden superar estos obstáculos.

La forma en que trabajamos en la experimentación no es muy común y los estudiantes no están acostumbrados a ella. Pero a pesar de ello, encontramos buena disposición en los alumnos.

Algunas características que se detectaron por la forma de trabajo son:

Al inicio algunos estudiantes de cierta manera sentían temor de expresar su opinión por miedo a ser criticados por sus compañeros.

Los estudiantes empiezan a cuestionar sus razonamientos y tratan de defender sus conceptos, además reflexionan sobre la importancia de entender los conceptos y no sólo aprenderlos de memoria.

Una vez que se acostumbraron a la dinámica con la que se desarrolló el curso los estudiantes se sintieron libres de expresar sus opiniones y sus dudas.

Ante las diferentes posiciones, los estudiantes tratan de argumentar y defender sus puntos de vista, con el mismo debate que se tiene se proporcionan bases para defender sus opiniones.
Desde este punto de vista de aprendizaje que es totalmente diferente al tradicional, el profesor poco interviene en el aula, su participación está dada para guiar la discusión tanto en los pequeños grupos como en el debate, para resumir o explicar los argumentos de los estudiantes, para continuar o culminar una discusión etc.

Bibliografia

Alanis, J. (1985), "*La adquisición del concepto de límite de una función*", Tesis de maestría especialidad Matemática Educativa. CINVESTAV IPN.

Chávez, H. (1993), "*El uso de la microcomputadora en el aprendizaje del Cálculo Diferencial: un medio entre la Imagen Conceptual y la Definición Conceptual* ", Tesis de maestría especialidad Matemática Educativa. CINVESTAV IPN.

Chávez, H. (1997), *"La enseñanza de los conceptos de límite y continuidad de funciones",* Memorias del VII seminario nacional. Calculadoras y microcomputadoras en Educación matemáticas. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV – IPN, México, pp. 175 - 182

Duval, R. (1998) "*Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*". Investigaciones en matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 173-201. Université Louis Pasteur de Strasbour, Frace. Ed. Hitt, F.,

Duval, R. (1993), "*Sémiosis et Noésis*", Conference A.P.M.E.P, I.R.E.M., Trad. en Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa, Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV del IP, pp. 118-137.

Hitt, F. (1997) "*El concepto de límite y la importancia del infinito potencial y actual*", Memorias del VI simposio internacional en Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica, México, Pp 31-38

Hitt, F. y Lara H. (1999) "*Limits, Continuity and Discontinuity of Functions fron two points of View: That of the Teacher and that of the Student* ". British Society for Research into Learning Mathematics. Lancaster, U. K.

Páez, R (1993) "*Dificultades de aprendizaje en el concepto de límite: Ideas del infinito*", Tesis de maestría, Especialidad Matemática Educativa. CINVESTAV IPN.

Sacristán, A. (1988). "*Procesos Infinitos: Centración en la intuición*", Tesis de maestría, Especialidad Matemática Educativa. CINVESTAV IPN.

Sierpínska, A. (1985), " *Obstacles Epistemologiques Relatifs a la notion de limite*", Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 6, No. 1, pp 5-67.

Sierpínska, A. (1987). "*Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits*", Educational Studies in Mathematics, Vol. 18, pp 371-397.