

¿La radicación y la potenciación como operaciones inversas? ¿Qué es lo que dicen los estudiantes de bachillerato?⁵

María Patricia Colín Uribe
Instituto Politécnico Nacional
pcolin@ipn.mx
Gustavo Martínez-Sierra

CICATA-IPN

gmartinezsierra@gmail.com

Resumen

Este trabajo es la continuación de las investigaciones de Lorenzo, D.(2005) y Colin, M. (2006), los cuales muestran los conceptos que estudiantes desde nivel básico hasta superior tienen acerca del operador raíz cuadrada, destacando la “disfuncionalidad escolar” que aparece en el tránsito de este operador en diferentes contextos: del aritmético al algebraico y del algebraico al funcional. Uno de estos resultados muestra que los estudiantes de estos niveles miran a las operaciones de radicación y potenciación como inversas, en particular que la inversa de obtener la raíz cuadrada es la operación de elevar al cuadrado. Este estudio pretende, a través de una secuencia de actividades, que los estudiantes concluyan que éstas operaciones sólo son inversas bajo ciertas condiciones.

Palabras clave: raíz cuadrada, disfunción, operador, contexto, operación inversa.

Abstract

This work is a continuation of the investigations of Lorenzo, D. (2005) and Colin, M. (2006), which show the concepts that students from basic to higher level have about the square root operation, highlighting the "dysfunctional school" in the transit of different contexts: arithmetic to algebra and algebra to calculus.. One of these results shows that students at these levels look at the operations and establishment of empowerment as a reverse, particularly as the inverse square root of Squares. This study attempts, through a

⁵ Este trabajo fue realizado en el marco de los proyectos

** “Un estudio de las relaciones entre el razonamiento cotidiano escolar y el razonamiento presente en los procesos de articulación y convención matemática”. Apoyo complementario a investigadores en proceso de consolidación (SNI 1). CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA (MEXICO). Clave: 2008/91144.

**Estudios sobre la construcción escolar de conocimiento matemático a través los procesos de convención, articulación y modelación matemática. Registro asignado por la SIP del IPN: 20090697



Congreso Internacional de Innovación Educativa

la innovación educativa, una estrategia de transformación
Del 14 al 16 de octubre de 2009

sequence of activities, level of high school students concluded that these operations are reversed only under certain conditions. .

Keywords: Square root, dysfunction, context, inverse, operation

Introducción

En el discurso matemático escolar, la matemática se presenta seccionada, es decir, se divide en áreas que están lineal y jerárquicamente estructuradas y son trabajadas bajo el supuesto de que las reglas del nivel anterior serán respetadas y utilizadas en el nivel posterior. Para nuestro tema de interés, la raíz cuadrada, esta jerarquización presenta ciertas disfuncionalidades, puesto que las reglas de la aritmética aprendidas para obtenerla, ya no son respetadas al movernos en el plano algebraico. Esta disfunción probablemente funciona como un obstáculo para que el estudiante comprenda el significado de este operador en el contexto algebraico (Colín, 2006). A nuestro trabajo le anteceden dos investigaciones; la primera realizada por Lorenzo (2005) quien se interesó por estudiar las concepciones que tienen los alumnos del Nivel Básico Secundaria sobre el concepto matemático raíz cuadrada. Este trabajo de investigación muestra cómo los libros de texto de nivel básico secundaria tratan, transmiten y justifican temas relacionados con la raíz cuadrada.

El segundo trabajo de investigación que antecede al nuestro es el realizado por Colín (2006), quien, a través de un detallado análisis epistemológico, muestra la naturaleza y significados de la raíz cuadrada en diferentes contextos; mediante un análisis didáctico muestra las costumbres escolares que los libros de texto presentan al momento de tratar la raíz cuadrada; por último, en un análisis cognitivo, presenta las concepciones que poseen los estudiantes respecto a expresiones que involucran a la raíz cuadrada. Finalmente, esta investigación muestra los fenómenos didácticos ligados a las concepciones que los estudiantes tienen respecto a la raíz cuadrada, entre los cuales se encuentran los siguientes:

- Los estudiantes, en su mayoría, consideran solamente a la raíz principal como la raíz cuadrada de un número. Esto es, el significado que le dan al operador raíz cuadrada es el que tiene en el contexto aritmético
- Para los estudiantes de secundaria, el concepto raíz cuadrada es entendido como un operador aritmético, no algebraico. La extracción de raíces cuadradas solamente da números positivos como resultado.



Congreso Internacional de Innovación Educativa

la innovación educativa, una estrategia de transformación
Del 14 al 16 de octubre de 2009

- Los estudiantes de Nivel Superior establecen la diferencia entre que la solución de una ecuación cuadrática (contexto algebraico) y la raíz cuadrada de un número (contexto aritmético).
- La costumbre escolar “la radicación es la inversa de la potenciación” es utilizada sin restricción.
- La raíz cuadrada que se considera para la solución de ecuaciones del tipo $x^2 - 4 = 0$ es la principal (positiva).
- La raíz cuadrada (en el contexto aritmético) tiene dos signos.
- Los libros de texto nos muestran que al calcular raíces cuadradas de números concretos, sólo se tomará la positiva (a la que llaman raíz principal).
- La gráfica de la expresión $y^2 = x$ es la misma que la de la expresión $y = \sqrt{x}$, puesto que ambas expresiones son iguales porque representan la misma función.

Nuestro trabajo de investigación se origina tomando como objeto de nuestro interés el fenómeno didáctico que Colin (2006) presenta “La **costumbre escolar** de utilizar a la radicación como inversa de la potenciación”, en particular de utilizar a la raíz cuadrada como la inversa de elevar al cuadrado. Así, nuestro problema de investigación será el indagar si las operaciones potenciación y radicación, el caso particular de la raíz cuadrada y la potencia de grado dos, son percibidas como inversas por estudiantes de bachillerato.

Considerando nuestro problema de investigación y basados en los resultados reportados por Lorenzo (2005) y Colín (2006), diseñamos una secuencia de actividades con el objetivo de lograr que alumnos de bachillerato entren en conflicto al enfrentarse a una situación en donde, al considerar (sin restricción) a las operaciones de potenciación y radicación como inversas, lleguen a resultados contradictorios.

Marco Teórico

Nuestro marco teórico es la Teoría de Situaciones Didácticas, pues ésta propone el estudio, control y determinación de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos matemáticos e implica que el investigador debe participar en la producción (o diseño) de las situaciones didácticas que analiza.

Metodología

Utilizaremos a la Ingeniería Didáctica como metodología, de la cual explicaremos brevemente sus fases:



Congreso Internacional de Innovación Educativa

la innovación educativa, una estrategia de transformación
Del 14 al 16 de octubre de 2009

Fase de planeación: Análisis preliminar. Consta de un análisis didáctico para el cual, revisaremos los programas de estudio de nivel medio superior, así como, los objetivos que persiguen. También realizaremos un análisis de los libros de texto utilizados en este nivel para el estudio de la raíz cuadrada. Describiremos los resultados de la secuencia de actividades, si los estudiantes dieron las respuestas acorde a las preguntas de investigación planteadas.

Fase de diseño: Diseño de la secuencia de actividades. (Fase predictiva y prescriptiva). Esta fase se refiere al control de las relaciones que existen entre el significado y las actividades. Es aquí donde se hacen las restricciones y se determinan las variables de control. Dichas variables son las siguientes:

- Que los alumnos hubieran trabajado con el tema raíz cuadrada
- Que los alumnos interpreten correctamente las instrucciones que se presentarán y encuentren las respuestas correctas.

Fase experimental. Para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación, se aplicó una secuencia de actividades a 17 estudiantes de sexto semestre del Nivel Medio Superior en el centro educativo Centro de Estudios Tecnológicos y de servicios número 135, dependiente de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI) de la Secretaría de Educación Pública. El tiempo programado para la realización de la secuencia fue de tres horas.

Fase de validación. Análisis a priori. Nuestra secuencia consta de cuatro actividades con cuatro incisos cada una, en las cuales además de solicitarles la resolución de los ejercicios, se les recomienda justifiquen su respuesta, con el propósito de que la reflexionen. El objetivo de la secuencia es que a través del desarrollo de las actividades, los estudiantes se percaten de que las operaciones de potenciación y radicación sólo resultan inversas bajo ciertas restricciones.

Análisis didáctico

Para hacer patente la presencia de la *raíz cuadrada*, en el currículo de matemáticas, analizamos los programas de estudio y sus objetivos. En este análisis describimos cómo existe el concepto *raíz cuadrada*, objeto de nuestro estudio. También revisamos la bibliografía recomendada por los planes de estudio de los niveles Medio Superior (DGETI). En total se revisaron 10 textos, de los cuales obtuvimos la siguiente información

- Los programas de estudio tratan a la raíz cuadrada en el área de Aritmética. En los cursos subsecuentes se utiliza sólo como herramienta, por ejemplo, en la solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, la elaboración de la gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$ entre otras.



Congreso Internacional de Innovación Educativa

la innovación educativa, una estrategia de transformación
Del 14 al 16 de octubre de 2009

- Los libros analizados presentan a la potenciación y radicación como inversas, unos hacen las restricciones correspondientes pero otros las omiten o la hacen al principio del capítulo, de tal manera, que al presentarla en temas avanzados, las restricciones ya se han perdido.
- Hay autores que hacen énfasis en la pertinencia de las restricciones respectivas, incluso, presentan algunos ejemplos en los cuales manifiestan la o las contradicciones que pudieran presentarse si no se hacen dichas restricciones.

Análisis Cognitivo

Para nuestro análisis cognitivo, describimos el objetivo de nuestra secuencia de actividades y las respuestas que proporcionaron los estudiantes.

La secuencia esta diseñada con el objetivo de que, a través de las actividades, los estudiantes se percaten que las operaciones de potenciación y radicación (en particular, las operaciones de extraer raíz cuadrada y elevar al cuadrado) no siempre son inversas. La secuencia consta de 4 actividades. A continuación mostraremos cada una de ellas así como la respuesta mas representativa que dieron los estudiantes.

Se trabajó con 17 alumnos que cursaban el último año de educación media superior, divididos en grupos de 3 personas, con un total de 5 equipos de 3 personas y 1 equipo de 2 personas.

Actividad 1. En esta actividad se pretende que el estudiante aplique sus conocimientos previos, manifestando que las operaciones de radicación y potenciación son inversas. La respuesta que esperamos es que los alumnos eliminen tanto exponente como radical, pues consideraran que estas operaciones son “inversas”.

Actividad 1		
Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, realizando las operaciones indicadas y justifica tus respuestas, para llenar la siguiente tabla.		
Expresión	Expresión simplificada	Justificación
$y = \sqrt{x^2}$	$y =$	
$y = \sqrt{(-x)^2}$	$y =$	
$y = (\sqrt{x})^2$	$y =$	
$y = (\sqrt{-x})^2$	$y =$	

$y = (\sqrt{-x})^2$	$y = -x$	La raíz se elimina con el cuadrado. $y = (\sqrt{-x})^2 = -x$
---------------------	----------	-----------------------------------------------------------------

Fig. 2 Actividad 1 Fig 3. Respuesta de un equipo a la actividad 1



Congreso Internacional de Innovación Educativa

la innovación educativa, una estrategia de transformación
Del 14 al 16 de octubre de 2009

Resultados de la actividad 1: Los estudiantes efectivamente utilizaron el hecho de que “las operaciones de potenciación y radicación son inversas”.

Actividad 2: Se les pidió llenar una tabla de datos y posteriormente trazar las gráficas de los puntos obtenidos en papel milimétrico. Esta actividad tiene por objetivo que los estudiantes solamente sustituyan el valor de la incógnita y evalúen la función dada, y , posteriormente, comparen sus resultados con lo obtenido en la tabla de la actividad 1.

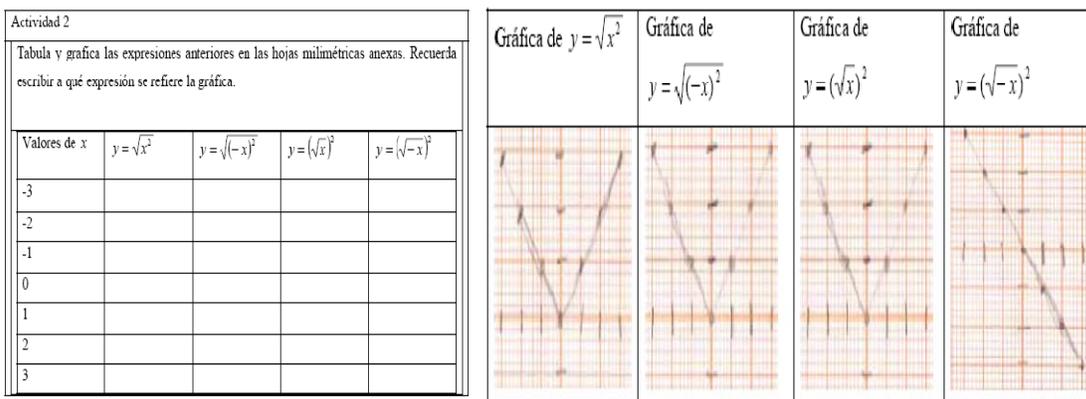


Fig. 4 Actividad 2 Fig. 5. Respuesta de un equipo a la actividad 2

Resultados de la actividad 2: El objetivo de esta actividad no se cumplió en su totalidad, pues algunos equipos aplicaron la “costumbre escolar” de considerar a la potenciación como inversa de la radicación, así que, desde un inicio, “cancelaron” la raíz y el cuadrado y trabajaron con el valor. Otro, (sólo 1) realizó la actividad como se le solicitaba y llegaron a las gráficas que se muestran.

Actividad 3: Se les pidió llenar una tabla, pero simplificando las expresiones que se utilizaron en la actividad 2. Lo que esperamos es que al simplificar, apliquen la “costumbre escolar” de considerar a las operaciones de potenciación y radicación como inversas. Finalmente se les pidió comparar las gráficas de la actividad 2 con las gráficas de estas nuevas funciones.



Congreso Internacional de Innovación Educativa

la innovación educativa, una estrategia de transformación
Del 14 al 16 de octubre de 2009

Actividad 3				
Tabula y grafica las expresiones simplificadas en las hojas matemáticas anexas. Recuerda escribir a qué expresión se refiere la gráfica.				
Valores de x	y =	y =	y =	y =
-3				
-2				
-1				
0				
1				
2				
3				

Fig. 6. Actividad 3

Gráfica de $y = \sqrt{x^2}$ simplificada	Gráfica de $y = \sqrt{(-x)^2}$ simplificada	Gráfica de $y = (\sqrt{x})^2$ simplificada	Gráfica de $y = (\sqrt{-x})^2$ simplificada

Fig. 7. Respuesta de un equipo a la actividad 3

Resultados de la actividad 3: Sólo un equipo aplicó este criterio, pues los demás, como ya lo habían realizado de esta forma, dijeron que era la misma actividad.

Actividad 4: Se pide a los estudiantes comparar las gráficas de las actividades 2 y 3 y anotar sus conclusiones. El objetivo es que los estudiantes se percaten que las operaciones que realizaron de "simplificación" no son correctas, pues obedecen a ciertas restricciones.

Actividad 4		
Compara las gráficas de cada expresión y su expresión simplificada para completar la siguiente tabla.		
Expresión	Expresión simplificada	¿Son iguales sus gráficas? ¿Son diferentes? ¿Por qué?
$y = \sqrt{x^2}$	$y = x$
$y = \sqrt{(-x)^2}$	$y = x$
$y = (\sqrt{x})^2$	$y = x$
$y = (\sqrt{-x})^2$	$y = x$

Fig. 8. Actividad 4

Expresión	Expresión simplificada	¿Son iguales sus gráficas? ¿Son diferentes? ¿Por qué?
$y = \sqrt{x^2}$	$y = x$	No son iguales... son diferentes... por que... cambiaron los signos... en la primera fueron positivos en la segunda variaron.

Fig. 9. Respuesta de un equipo a la actividad 4

Resultados de la actividad 4: Sólo un equipo logró determinar que las operaciones que realizó no eran correctas, pero no logró determinar el porqué. El resto de los equipos no logró ver que las operaciones de "cancelación" no eran correctas. Al llegar a una contradicción lo que concluyeron fue que tal vez en un paso del proceso se habían equivocado al usar la calculadora, un despeje, pero nunca dudaron que las operaciones de potenciación y radicación no siempre son inversas.

Conclusiones



Congreso Internacional de Innovación Educativa

la innovación educativa, una estrategia de transformación
Del 14 al 16 de octubre de 2009

- Los libros de texto recomendados por los planes de estudio de la DGETI consideran que las operaciones de radicación y potenciación sólo son inversas bajo ciertas condiciones.
- Los estudiantes de bachillerato consideran a las operaciones de potenciación y radicación como inversas (en particular, la de potencia dos y raíz cuadrada).
- Esta concepción está tan arraigada en los estudiantes que, al realizar la actividad 4 de comparación de gráficas, no pudieron establecer que las “cancelaciones” que habían hecho en las actividades anteriores sólo podían realizarse para ciertos valores de x
- La “costumbre escolar” de tratar a las operaciones de potenciación y radicación como inversas genera que el estudiante de resultados como

$$y = \sqrt{x^2} = x \quad \text{o} \quad y = (\sqrt{-x})^2 = -x$$

como Colín (2006) ya lo había mostrado en su trabajo de investigación.

- Los estudiantes del DGETI no identificaron a las operaciones de potenciación y radicación como “no inversas”.
- Se propone aplicar esta secuencia a estudiantes de nivel medio superior de los CECyTs del IPN para ampliar nuestros resultados a estudiantes de nivel bachillerato.
- También proponemos trabajar con estudiantes de nivel Superior para mostrar si, a este nivel, los estudiantes ya no manejan a la potenciación y radicación como inversas y así concluir que la raíz cuadrada, sus propiedades y restricciones son establecidas conforme el estudiante avanza en su formación escolar.
- Finalmente, tenemos como propósito mejorar esta secuencia didáctica una vez observadas las variables que se presentaron en el desarrollo de ella.
-

Referencias

- 1) Chevallard, Y. (1998). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique.
- 2) Colín, M. (2006). *De la aritmética al cálculo. Un estudio transversal de la raíz cuadrada*. Tesis de Maestría. No publicada. Programa de Matemática Educativa CICATA-IPN, México.
- 3) Lorenzo, D. (2005). *Sobre la vida escolar de la raíz cuadrada en el nivel básico*. Tesis de Licenciatura. No publicada. Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- 4) Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.*, 8(2), 195-218, México.
- 5) Pulido, A. (1994). *Matemáticas I*. México: Nueva Imagen.



ANEXO

EXPERIENCIA PROFESIONAL

MARIA PATRICIA COLIN URIBE

Patricia Colín estudió la licenciatura en Física y Matemáticas en el Instituto Politécnico Nacional (ESFM-IPN) y la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa en Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (CICATA-IPN). Ha realizado diversos trabajos de investigación relativos a la enseñanza aprendizaje de conceptos relacionados con la “raíz cuadrada”. Ha dirigido diversas tesis de nivel licenciatura y maestría. Ha participado como ponente y evaluadora en congresos tanto nacionales e internacionales enfocados a la investigación en el área de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Ha participado también en diversos proyectos de investigación. Actualmente labora como profesora-investigadora en el CECyT Narciso Bassols del Instituto Politécnico Nacional, su Alma Mater.

GUSTAVO MARTINEZ SIERRA

Gustavo Martínez es Profesor-Investigador del Posgrado en Línea en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Su área de trabajo profesional pertenece a la Matemática Educativa y la principal línea de investigación que cultiva versa sobre el estudio de los procesos construcción de conocimiento matemático en diferentes niveles escolares. Su obra se enmarca dentro del objetivo de <caracterizar las condiciones bajo las cuales es posible la construcción del conocimiento matemático en condiciones escolares>.

Estudió la licenciatura en Matemáticas en el Instituto Politécnico Nacional (ESFM-IPN) y la Maestría en Ciencias en el departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav-IPN). Realizó sus estudios doctorales en el Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN (CICATA-IPN).

