

La modelación matemática en el ambiente de aprendizaje: una innovación

Patricia Camarena Gallardo
ESIME-Zacatenco - IPN

Resumen.

En esta presentación se muestra el proceso de determinación de elementos cognitivos y de habilidades del pensamiento que son necesarios para poder llevar la modelación matemática al ambiente de aprendizaje, constituyéndose como una innovación, al no haberse trabajado antes y al determinarse a través de un proceso metodológico, al mismo tiempo se otorga la definición de modelo matemático y del proceso de modelación matemática.

Palabras Clave. Modelación, Matemáticas, Matemáticas en Contexto, Modelo, Ingeniería.

Abstract.

This work shows the process of determination cognitive elements and abilities thinking which are necessary for mathematics modeling in classroom, it is an innovation because never have been worked before, less with a methodology process, also there is a mathematics model and modeling mathematics process definitions.

Introducción.

El presente trabajo incide en la modelación matemática en carreras universitarias, en donde la matemática no es una meta por sí misma. En particular, por la riqueza matemática que prevalece en las ingenierías el proyecto se aboca a estas áreas de estudio. Por otro lado, la modelación matemática no ha sido incorporada de manera formal en los ambientes de aprendizaje, por lo que este documento hace una propuesta de los elementos que deben ser tomados en cuenta para llevarla a las aulas de clase, constituyendo una innovación educativa en el nivel superior. Así, esta propuesta pretende conocer los elementos cognitivos y de habilidades del pensamiento que intervienen en la construcción de un modelo matemático; para lo cual es necesario contestar las siguientes interrogantes: ¿Qué es un modelo matemático?, ¿Qué es modelación matemática?, ¿Qué elementos de orden cognitivo debe conocer el estudiante para construir el modelo matemático de un problema escolar de ingeniería?, ¿Qué habilidades del pensamiento son indispensables para construir el modelo matemático de un problema escolar de ingeniería?.

Para poder abordar las preguntas el trabajo se fundamenta en la teoría de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* (Camarena, 1984, 1987, 1990, 1995, 1999, 2000_a, 2000_b) la cual a su vez se fundamenta en tres paradigmas:

- La matemática es una herramienta de apoyo y materia formativa.
- La matemática tiene una función específica en el nivel superior.
- Los conocimientos nacen integrados.

El supuesto filosófico educativo de esta teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas.

La teoría contempla cinco fases:

- La Curricular, desarrollada desde 1984.
- La Didáctica, iniciada desde 1987.
- La Epistemológica, abordada en 1988.
- La de Formación Docente, definida en 1990.
- La Cognitiva, estudiada desde 1992.

Las preguntas formuladas inciden en la fase didáctica, cuya propuesta didáctica se denomina la *Matemática en Contexto*. La *Matemática en Contexto* contempla nueve etapas:

- 1.- Análisis de textos de las demás asignaturas que cursa el estudiante.
- 2.- Planteamiento del problema de las disciplinas del contexto.
- 3.- Determinación de las variables y de las constantes del problema.
- 4.- Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y su solución.
- 5.- Determinación del modelo matemático.
- 6.- Solución matemática del problema.
- 7.- Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto.
- 8.- Interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas del contexto.
- 9.- Descontextualizar en el ambiente de aprendizaje los temas y conceptos matemáticos involucrados.

En general el hablar de la *Matemática en Contexto* es desarrollar los cursos de matemáticas a las necesidades y ritmo que dictan los cursos de ingeniería. La *Matemática en Contexto* fortalece la reorganización cognitiva de conceptos y procesos matemáticos.

A través de la *Matemática en Contexto* se cambia el paradigma educativo de enseñanza tradicional, ahora se trata de una enseñanza con conocimientos integrados y centrada en el estudiante, dando los temas de matemáticas vinculados con las demás asignaturas que cursa el alumno y presentándolas al ritmo y tiempos que son requeridos por los estudiantes (Camarena, 1987). Con la *Matemática en Contexto* se construyen conocimientos integrados no fraccionados, aprendizajes significativos, así como conocimientos duraderos no volátiles.

Justificación.

La matematización de los fenómenos y problemas que se presentan en el campo laboral del futuro ingeniero es un punto de conflicto cognitivo (Camarena, 1990, 1995), ya que éste recibió sus cursos de matemáticas por un lado y los de la ingeniería por otro lado, de forma tal que en el momento de hacer uso de las dos áreas del conocimiento sus estructuras cognitivas están desvinculadas y él debe integrarlas para poder matematizar el problema que tiene enfrente (Camarena, 1990, 1995, 1999).

Por otro lado, la modelación matemática es uno de los temas que aparecen en el currículo oculto de las carreras universitarias, ya que se supone que el egresado debe saber modelar y, en muchos planes y programas de estudio para nada se hace alusión al término "modelación

matemática”; en otros currículos, dentro de los objetivos de los programas de estudio, se dice que el alumno deberá saber modelar problemas de otras áreas del conocimiento, y en muy pocos currículos viene este término incluido en el temario de las asignaturas. Pero, en ningún caso se dice cómo incorporar la modelación matemática a los cursos de matemáticas, ni cómo lograr que los estudiantes modelen situaciones de otras áreas o problemas de la vida cotidiana. De hecho, no existe ninguna asignatura de la ingeniería que se aboque a elaborar modelos matemáticos, además, resulta que los profesores de matemáticas sienten que este punto compete a los profesores de los cursos propios de la ingeniería, mientras que estos últimos presuponen que los maestros de matemáticas son quienes deben enseñar al estudiantes a modelar fenómenos de la ingeniería.

Este punto de conflicto, el cómo modelar matemáticamente, se aborda desde la teoría de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* y se considera que debe ser atendido de forma interdisciplinaria. En la fase didáctica de la teoría se tiene la propuesta didáctica de la *Matemática en Contexto*, a través de la cual los problemas de las asignaturas de ingeniería que cursa el alumno son el medio para que se propicie el aprendizaje de la matemática. Para ello, la *matemática en contexto* contempla nueve etapas, en donde la etapa central es la de la construcción del modelo matemático. Es central en el sentido de que sin esta etapa no se logra la *Matemática en Contexto* ni tampoco llegar a la solución del problema.

Cabe hacer mención sobre el perfil del docente de matemáticas que trabaja con la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*: si su formación es de matemático debe incursionar en las áreas del conocimiento de la ingeniería, mientras que si su formación es de ingeniero debe prepararse más en los conocimientos de la matemática.

Concluyendo, lo que se pretende es tener los indicadores necesarios que interviene en la modelación matemática, para incorporar ésta de forma consciente y eficiente en los cursos de matemáticas y así los alumnos estén capacitados para establecer el modelo matemático de los eventos contextualizados con los que se enfrente en su vida laboral y profesional. Es decir, se quiere saber qué conocimientos previos son necesarios para que el alumno aprenda a modelar, independientemente de las áreas del conocimiento que se articulan en el proceso de contextualizar, o sea, es claro que debe conocer la matemática que interviene así como la disciplina del contexto, pero qué más debe conocer y dominar.

Se han tomado como sinónimos a modelación matemática, matematización y modelaje.

Metodología.

La metodología contempla dos etapas: La primera se aboca a definir los conceptos de modelo matemático y modelación matemática, lo cual se lleva a cabo a través del análisis de problemas que requieren matemáticas para su solución. La segunda incide en la determinación de los elementos cognitivos y de habilidades del pensamiento para la construcción del modelo matemático, lo cual se logra a través de instrumentar, los problemas detectados en la primera etapa, a un grupo de estudiantes para observar el proceso de construcción del modelo matemático del problema e identificar las regularidades subyacentes.

Dado el problema a abordar sobre modelos matemáticos el material de trabajo son problemas de la ingeniería, en particular este trabajo se aboca a la ingeniería electrónica y sus ramas afines, la metodología que se emplea es la del análisis de textos de ingeniería (Camarena, 1984), así como el análisis de algunos proyectos investigación de la ingeniería en donde se han elaborado modelos matemáticos, los cuales corresponden a la ingeniería aplicada.

Como es sabido, el análisis de textos constituye una metodología para la detección de ciertos elementos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias (Camarena, 1984), depende de lo que se persigue para mirar de la forma indicada a esos textos. Así, en la primera etapa lo que principalmente se busca es: 1. Problemas que se plantean para ser abordados por el autor. 2. La manera como representan matemáticamente los problemas que se han planteado. 3. Los conceptos de temas de la ingeniería que se describen matemáticamente.

Para el análisis de textos se tomó en cuenta la clasificación que establece “Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior de México” acerca de las asignaturas de carreras de ingeniería. Esta clasificación define 5 bloques de materias: las ciencias básicas, las ciencias básicas de la ingeniería, las ciencias de especialidad de la ingeniería, las ciencias sociales y humanísticas y, las ciencias económicas y administrativas.

Es claro que para la presente investigación los tres primeros bloques son los que interesan. Dentro de las ciencias básicas se encuentran la física y la química como base de las ciencias básicas de la ingeniería, mientras que la matemática es una herramienta de apoyo a éstas, sin olvidar el carácter formativo que esta última ofrece al futuro ingeniero (Camarena, 1984, 1990, 1995). Las materias de circuitos eléctricos, electromagnetismo, computación, electrónica básica y comunicaciones básicas forman las ciencias básicas de la ingeniería. Comunicaciones, electrónica, control, acústica, robótica, telefonía y computación son las áreas de aplicación de la ingeniería.

Para la segunda etapa se considera una muestra de estudiantes de ingeniería quienes resuelven una selección de los problemas analizados en la primera etapa, con el propósito de identificar los elementos cognitivos y de habilidades del pensamiento que entran en acción en el proceso de construir el modelo matemático del problema.

Para ello se seleccionaron a 21 estudiantes, tres de cada semestre, del tercero al noveno semestre de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica del Instituto Politécnico Nacional.

Análisis de resultados.

Los resultados de aplicar la metodología arrojan las respuestas a las interrogantes planteadas en un principio, elementos que son aplicables en los ambientes de aprendizaje donde la modelación matemática hace presencia, siendo éstos innovadores ya que no han sido reportados en ningún estudio de esta naturaleza.

El concepto de *modelo matemático*.

Del análisis de textos se tiene que la matemática en ingeniería es un lenguaje, ya que casi todo lo que se dice en la ingeniería se puede representar a través de simbología matemática (Camarena, 1990). Es más, el que se represente a través de la terminología matemática y se haga uso de la matemática en la ingeniería, le ayuda a la ingeniería a tener carácter de ciencia por un lado y por el otro, le facilita su comunicación con la comunidad científica de ingenieros (Camarena, 2000_a). Cabe mencionar que la matemática en la ingeniería tiene características particulares (Camarena 1984): predice comportamientos; ayuda a hacer cálculos teóricos en vez de prácticos, con lo cual se ahorra tiempo y recursos tanto físicos como económicos; la matemática es un lenguaje de la ingeniería; con la matemática se optimizan diseños y recursos, se minimizan errores; se crea un espíritu científico y crítico, una mente analítica y creativa.

De los textos e investigaciones analizadas se determinó que dentro del conocimiento de la ingeniería, se tienen problemas de la ingeniería, asimismo, se tienen objetos de la ingeniería que para su mejor manejo o referencia se les representa matemáticamente y también se tienen situaciones que se pueden describir a través de la simbología matemática. Estos casos permiten caracterizar a los modelos matemáticos. A continuación se muestran ejemplos.

a) PROBLEMAS. Se quiere conocer el fenómeno de carga de un condensador, cuya capacitancia es C, el cual está conectado en serie con un resistor de resistencia R, a las terminales de una batería que suministra una tensión constante V, este planteamiento se puede representar a través de la ecuación diferencial lineal siguiente (Camarena, 1987):

$$R \frac{d}{dt} q(t) + \frac{1}{C} q(t) = V$$

b) OBJETOS. Considérese una señal eléctrica del tipo alterno sinusoidal, la señal es el objeto de la ingeniería el cual se representa a través de la función (Camarena, 2000_a): $f(t) = A \sin(t + \infty)$

c) SITUACIONES. El condensador está totalmente descargado al inicio del problema. Esta situación se puede representar matemáticamente, tomando en cuenta que al inicio del problema $t=0$ y que la carga es una función del tiempo $q=q(t)$, como (Camarena, 1987): $q(0)=0$.

De los tres casos mencionados los que caracterizan a los modelos matemáticos son los objetos y los problemas, así la definición es: *Un modelo matemático es aquella relación matemática que describe objetos o problemas del área del contexto.*

Las relaciones matemáticas pueden ser desde una ecuación, un sistema de ecuaciones hasta una distribución de probabilidad.

El concepto de modelación matemática.

De las etapas de la *Matemática en Contexto* y lo detectado en el análisis de los problemas estudiados para la investigación se construye la definición del término “modelación matemática”.

La modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto.

Este proceso cognitivo consta de tres momentos, los que constituyen los indicadores de la modelación matemática: 1. Identificar variables y constantes del problema, se incluye la identificación de lo que varía y lo que permanece constante. 2. Establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados en el problema, implícita o explícitamente, ya sean del área de la matemática o del contexto. 3. Validar la “relación matemática” que modela al problema, lo cual se hace a través de regresarse y verificar que involucre a todos los datos, variables y conceptos del problema. Dependiendo del problema, algunas veces se puede validar el modelo matemático a través de ver si la expresión matemática predice la información otorgada o la información experimental. En otros casos, para validar el modelo, es necesario dar la solución matemática para ver que se predican los elementos involucrados.

Un punto importante de mencionar es que el modelo matemático no es único, hay varias representaciones matemáticas que describen el mismo problema, razón por la cual se hace necesaria la validación del mismo (tercer momento).

La forma de abordar (o resolver) matemáticamente el modelo matemático tampoco es única, elemento que permite verificar la versatilidad de la matemática, así como su consistencia.

Elementos cognitivos que intervienen en la construcción del modelo matemático.

El análisis de la instrumentación, a los alumnos, de problemas específicos de cada área cognitiva de la ingeniería en electrónica permitió detectar las regularidades que se reportan en este trabajo, las cuales son independientes de los niveles escolares e independientes de las áreas del conocimiento. Para llevar a cabo la modelación matemática se hace necesario poseer los siguientes elementos cognitivos:

- Los enfoques de los temas y conceptos matemáticos del área del contexto (Camarena, 1990). Cada tema y concepto matemático posee varios enfoques, por ejemplo, la derivada es un cociente de diferenciales, es un límite muy particular, es la operación inversa a integrar, es una razón de cambio, es la pendiente de la recta tangente a la curva, etc. Conocer estos enfoques es necesario para modelar.
- La transposición contextualizada (Camarena, 2001). Es conocido el hecho de que el saber científico sufre una transformación para convertirse en un saber a enseñar, denominado transposición didáctica. El conocimiento que se lleva al aula sufre otra transformación para convertirse en un saber de aplicación, a lo que se denomina *transposición contextualizada*.
- El manejo conceptual de la matemática descontextualizada (Camarena, 1999). Es importante que sea del conocimiento del alumno que la matemática es universal en el sentido de que es aplicable a varios contextos. Dentro de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* se concibe como matemática conceptual a aquella matemática si se tiene el concepto es porque se puede transferir ese conocimiento, porque se conocen los diferentes enfoques de concepto, porque se conocen los puntos de control de error del concepto, porque se conocen los patrones de comportamiento del concepto cuando se mueven los parámetros que lo componen, porque se puede transitar entre los diferentes registros de representación del concepto, etc.

Habilidades del pensamiento que intervienen en la construcción del modelo matemático.

Al igual que en los elementos cognitivos, a través del análisis de la instrumentación de problemas de cada área cognitiva de la ingeniería en electrónica se detectan las habilidades del pensamiento que entran en acción en la construcción del modelo matemático. Así, para llevar a cabo la modelación matemática es necesario desarrollar en el estudiante las siguientes habilidades del pensamiento:

- Habilidad para identificar los puntos de control de error. Esta habilidad forma parte de tener una matemática conceptual, como se ha mencionado.
- Habilidad para transitar del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa. Para este punto se puede ver la referencia de Olazábal (2004), quien hace una categorización de problemas de matemáticas contextualizados respecto a la demanda de traducción del lenguaje natural al matemático.
- Habilidades para aplicar heurísticas. Las heurísticas como estrategias para abordar un problema, con la clasificación que otorga Nickerson (1994) a las dadas por Polya (1976).
- Habilidad para identificar regularidades. Entre las habilidades básicas del pensamiento, esta habilidad se hace notoria.
- Habilidad para transitar entre las diferentes representaciones de un elemento matemático. Se consideran las representaciones que describe Duval (1998): aritmética, algebraica, analítica y visual, incluyéndose la representación contextual que maneja la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*.
- Habilidad para hacer "consideraciones" o "idealizar" el problema (cuando proceda). Hay problemas tan complejos que deben ser idealizados para poderse matematizar, en otras ocasiones es necesario hacer consideraciones, como controlar variables para poder lograr la matematización.

Conclusiones.

Los modelos matemáticos son parte fundamental de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*, los elementos cognitivos y habilidades del pensamiento que se han detectado proporciona una fuente de conocimientos para fortalecer la didáctica de la *Matemática en Contexto*. Aportes como los que se muestran en este trabajo son innovaciones educativas que apoyan la práctica docente para incidir en la formación integral de cuadros profesionales de calidad.

Bibliografía.

- Camarena G. Patricia, (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería*. Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN, México.
- Camarena G. Patricia, (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.
- Camarena G. P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*. Edit. ESIME-IPN.
- Camarena G. Patricia, (1995). *La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería*. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.
- Camarena G. Patricia, (1999). *Hacia la integración del conocimiento: Matemáticas e ingeniería*. Memorias del 2º Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, México.
- Camarena G. P. (2000_a). Reporte de investigación titulado: *Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería*. ESIME-IPN, México.
- Camarena G. Patricia, (2000_b). *Las Funciones Generalizadas en Ingeniería, construcción de una alternativa didáctica*. Colección: Biblioteca de la Educación Superior, Serie Investigaciones, ANUIES, México.
- Nickerson Raymond S., Perkins David N. y Smith Edward E. (1994). *Enseñar a pensar, aspectos de la aptitud intelectual*. Editorial Paidós M. E. C.
- Olazábal C. Ana y Camarena G. Patricia (2004). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico de la matemática en contexto*. Tercer Congreso Internacional "Retos y Expectativas de la Universidad", México.
- Polya G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.
- Bibliografía de los programas de estudio de las asignaturas de carreras de ingeniería electrónica y ramas afines.

TÍTULO DEL TRABAJO:

La modelación matemática en el ambiente de aprendizaje: una innovación

AUTORA:

Patricia Camarena Gallardo
ESIME-Zacatenco - IPN

DIRECCIÓN:

Unidad Profesional Adolfo López Mateos, CFIE

Col. Lindavista, C. P. 07360

No. TELEFÓNICO:

57-29-60-00 Ext. 57128

CORREO ELECTRÓNICO:

pcamarena@ipn.mx

NECESIDADES PARA LA PRESENTACIÓN:

Computadora y cañón

BREVE CURRÍCULO:

Lic. en Física y Matemáticas. Doctorado y Maestría en Ciencias en Matemática Educativa.
Premio Nacional ANUIES 2000 a la mejor tesis de doctorado en contribución a la Educación Superior.

Miembro del Sistema Nacional de Investigadores, Nivel 2.

Autora de la teoría pedagógica denominada: La Matemática en el Contexto de las Ciencias.

Coordinadora de la Red de Investigación MACOCIENCIAS.

Coordinadora de la Comunidad Virtual Nacional de Matemáticas de la CUDI.

Representante de México ante el Comité Interamericano de Educación Matemática.

Líneas de investigación: Educación Matemática y Matemáticas aplicadas a la Ingeniería.

EJE TEMÁTICO: Ámbitos de la innovación educativa