Descomposición genética del concepto integral definida

Martha Patricia Jiménez Villanueva
mjimenezv@ipn.mx

María del Rosario Rocha Bernabé
rrocha@ipn.mx

Jacqueline Arzate Gordillo
jarzate@ipn.mx
Escuela Superior de Cómputo (ESCOM)-Instituto Politécnico Nacional (IPN)

Línea temática

Docencia, investigación e innovación educativas

Resumen

El presente estudio es motivado por un problema real en el aprendizaje del concepto de integral definida en el nivel superior, los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de dicho concepto, en el mejor de los casos adquieren habilidades para aplicar los diferentes métodos de integración (por partes, cambio de variable, sustitución trigonométrica, fracciones parciales, etc.) para resolver problemas más o menos complejos, pero no adquieren una comprensión real del significado del concepto. Nuestra hipótesis es que la forma en que el concepto de integral es normalmente introducido en el nivel superior ha privilegiado el desarrollo de habilidades y descuidado el análisis del concepto. Lo anterior ha propiciado que los estudiantes presenten dificultades para identificar situaciones donde pueden aplicar el concepto de integral definida. En este sentido, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿existe alguna forma de introducir el concepto de integral definida que favorezca el desarrollo de habilidades y contribuya a una mejor comprensión del mismo?

Para verificar la validez de la hipótesis planteada y dar respuesta a la pregunta, en primer lugar, se hace un análisis de los resultados de diferentes investigaciones en torno al concepto de integral definida, tomando como referencia la teoría APOS (Dubinsky, 1991 y 2005; Asiala, 1996 y 1997) y planeamos una descomposición genética del concepto de integral definida.

Palabras clave

Descomposición genética, integral definida, construcciones mentales, teoría APOS.

Propósito

El contenido de este documento forma parte de una investigación más amplia, el propósito específico de esta etapa de la investigación es identificar los elementos que configuran el concepto de integral definida y, a partir de dichos elementos, diseñar actividades de aprendizaje que conduzcan a la comprensión del mismo.

Destinatarios

Esta investigación está dirigida con el fin de ser aplicada a alumnos de primer semestre de ingeniería que cursan la unidad de aprendizaje de cálculo.

Contexto

El tratamiento instruccional se llevará a cabo durante cuatro semanas del curso de cálculo, con estudiantes de primer semestre de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Instituto Politécnico Nacional (IPN). Los estudiantes realizarán varias actividades centradas en el concepto de integral definida alrededor del tercer mes de iniciado el curso de cálculo; en los primeros tres meses se estudiarán otros conceptos del programa de cálculo, como son: números reales, desigualdades, funciones, continuidad, límite y derivada, entre otros. Lo anterior con el objeto de proporcionar a los estudiantes los conceptos previos que les permitirán enfrentar el concepto de integral definida. La estrategia pedagógica usará los elementos del ciclo de enseñanza ACE con algunas modificaciones. Nuestro ciclo de enseñanza se inicia con Actividades con computadora, usando el *software* Mathematica (diseñadas para ayudar a los estudiantes a hacer las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética), y Ejercicios extraclase con la computadora, las soluciones se discutirán en primer lugar por medio de la Discusión en un foro entre los integrantes de cada equipo y después con una discusión en el laboratorio (dirigidas para llevar a los estudiantes a reflexionar sobre lo que hicieron en la computadora y la forma en que resolvieron los ejercicios apoyados con el *software* Mathematica. La organización de la estrategia pedagógica da lugar al ciclo de enseñanza AED (AED: Actividades en computadora, Ejercicios extraclase y Discusión en un foro y en el laboratorio de computación).

Marco de referencia

Desde hace muchos años se han identificado las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de cálculo y gracias a las investigaciones realizadas en relación con el funcionamiento cognitivo del estudiante, en particular dentro del dominio de las matemáticas, se han realizado algunas propuestas que han repercutido directamente en los programas de estudio.

Al respecto, Artigue (1995, p. 105) menciona algunas propuestas realizadas en los años 80:

- Modificar las relaciones entre la teoría y las aplicaciones, organizando la enseñanza alrededor de algunos problemas importantes.
- Equilibrar mejor lo cuantitativo y lo cualitativo.
- Apoyarse en objetos típicos sencillos que más adelante servirán de referencia.
- Teorizar únicamente lo necesario, con base en niveles de formalización accesibles a los estudiantes.
- Promover un enfoque constructivista del aprendizaje.

Algunas investigaciones se han centrado en el estudio de las dificultades en el aprendizaje de un concepto particular. En el siguiente apartado describiremos algunas de las investigaciones que se han realizado en torno al cálculo integral.

Una de las primeras investigaciones en relación con el concepto de integral definida (Orton, 1983) mostró que los estudiantes participantes en su investigación poseían un razonable dominio del álgebra algorítmica en el desarrollo de cálculos de integrales; sin embargo, presentaban dificultades significativas en la conceptualización del proceso de límite subyacente en la noción de integral definida, además de una ausencia de significado asociado a los símbolos que utilizaban.

Cordero (2005) señala que en los programas curriculares hay un énfasis significativo en los aspectos formales de los conceptos de cálculo, donde conceptos fundamentales como la integración son explicados a través de las concepciones de límite y función, acompañadas de sus representaciones geométricas, y manifiesta que:

> Tal estatus genera una "cultura" en el profesor y el estudiante, donde "aprenden a decir" lo que es la derivada y la integral y a representarlas geométricamente, sin tener una comprensión que les permita estudiar fenómenos de variación continua. Por lo general,

> conciben el *calculus* como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales, *a posteriori* se les busca una aplicación. (Cordero 2005, p.269)

Por otro lado, Bezuidenhout (2000) menciona que los estudiantes universitarios tienen algunas concepciones inapropiadas del concepto imagen de la integral debido a la insuficiente abstracción del de imagen de integral ligado al área como contexto.

Llorens y Santonja (1997) afirman que el alumno prefiere el contexto algebraico-formal al visual-algebraico, sencillamente porque no los ha integrado, y resumen las deficiencias que tienen los estudiantes en el aprendizaje de la integral definida de la siguiente forma:

Generalmente, los estudiantes identifican “integral" con “primitiva".

La integral es considerada como un proceso puramente algebraico. El estudiante puede ser capaz de aplicar diferentes métodos de integración y, al mismo tiempo, ignorar lo que son las sumas de Riemann, además de no ser capaces de aplicar la integral al cálculo de áreas.

Las integrales “definidas" se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando ésta no pueda aplicarse; es decir, el símbolo $\int_a^b f(x)dx$ representa sólo un paso más del cálculo de primitivas. Este tipo de deficiencias lleva a los estudiantes a no contestar correctamente preguntas como: ¿Por qué $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$ es incorrecto?

No se integra el concepto de área con el de integral.

Los estudiantes cometen errores no sólo porque no consideran la discontinuidad de la función que están integrando sino, además, porque no tienen una imagen visual del problema ni de una función siempre positiva ni de la misma integral como área.

Al respecto, Muñoz (2000) propone plantear situaciones problema a partir de las cuales se formen nociones y procedimientos en estrecha relación, asociados con el cálculo integral, y señala que las rupturas y posibles relaciones entre lo conceptual y lo algorítmico, en la enseñanza del cálculo integral, es un punto importante que se debe seguir profundizando.

De lo anteriormente expuesto podemos resaltar que, si bien los estudiantes pueden realizar de forma más o menos mecánica y resolver algunos problemas relacionados con la integral definida, se han encontrado grandes dificultades para alcanzar una comprensión satisfactoria de dicho concepto y una de las razones de estas dificultades es que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica de los conceptos, así como por la existencia de una desconexión entre el concepto de integral y su particular imagen del concepto. Así mismo, se han detectado dificultades de los estudiantes en la comprensión del concepto de integral definida como límite de una suma debido a un entendimiento no adecuado del proceso de límite y se ha evidenciado que los estudiantes no son capaces de comprender el papel que juega el límite en la definición ni de dotar de significado a los símbolos que se utilizan en estos cálculos. Además, se han manifestado las dificultades que presentan los estudiantes para transferir lo aprendido a contextos diferentes en el que se estudió.

El marco de trabajo que hemos elegido para desarrollar nuestra metodología proviene de la Teoría APOS, desarrollada por Dubinsky y un grupo de investigadores denominado RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), basada en la idea de abstracción reflexiva de Piaget y modificada para ser aplicada al pensamiento matemático avanzado. Dubinsky (1991, 2000a) y Asiala *et al.* (1996) consideran que los sujetos realizan ciertas construcciones mentales para comprender los conceptos matemáticos. Estas construcciones se denominan: acciones, procesos, objetos y esquemas, y se logran mediante diferentes mecanismos como: interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación y tematización.

La teoría APOS

El marco teórico se forma esencialmente de tres componentes: inicia con un análisis teórico de un determinado concepto matemático de lo que significa entender un concepto y la forma en que la comprensión puede ser construida por el estudiante. Esto conduce al diseño de un tratamiento instruccional que se centra directamente en tratar de lograr que los estudiantes realicen las construcciones pedidas por el análisis. La implementación de la instrucción lleva a la recolección del dato que se analiza en el contexto de la perspectiva teórica. Basado en el análisis teórico, la recolección y el análisis de datos se prueba y se refina tanto el análisis teórico inicial como la instrucción. Este ciclo se repite tantas veces como sea necesario para comprender la epistemología del concepto y evaluar los efectos de la instrucción (Dubinsky y McDonald 2001, p. 5).

El análisis teórico es propuesto en la forma de una descomposición genética, un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo el concepto puede desarrollarse en la mente de un individuo (Asiala. 1996, p. 7). El proceso de construcción de una buena descomposición genética, o al menos de una adecuada, es bastante largo. En este momento se cuenta con descomposiciones genéticas para algunos conceptos de cálculo, del álgebra lineal, del álgebra abstracta y de la lógica.

En esta teoría se considera que la comprensión de un objeto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales construidos previamente para formar acciones; las acciones son interiorizadas para formar procesos, los cuales son encapsulados para formar objetos; los objetos pueden ser des-encapsulados para regresar a los procesos desde los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas.

Procedimiento

Para el desarrollo de la investigación se plantean cinco etapas divididas en diferentes fases.

- Etapa I. Estado del arte
    - Fase I. 1: Investigación: Revisión de la literatura sobre los temas relevantes en relación con el concepto de integral definida.
    - Fase I. 2: Descomposición genética: En esta fase se diseñará la descomposición genética del concepto integral definida basado en los resultados de las fases I. 1

- Etapa II. Diseño y aplicación de actividades
    - Fase II. 1: Diseño de actividades: En esta fase se seleccionarán las situaciones-problema para el diseño de las tareas computarizadas sugeridas por el marco teórico.
    - Fase II. 2: Estudio piloto: En esta fase se aplicarán las actividades a un grupo de alumnos de primer semestre de Ingeniería en sistemas computacionales de la Escuela Superior de Cómputo.

- Etapa III. Análisis de datos. Se realizará un estudio cuantitativo y cualitativo de los resultados obtenidos en el estudio piloto.

- Etapa IV. Revisión de la descomposición genética y de las actividades a la luz de los resultados.

En este momento de la investigación nos encontramos en la Fase II. 1 de la segunda etapa.

Desarrollo

Para el desarrollo de la primera etapa se hizo un análisis de las investigaciones realizadas en relación con el concepto de integral definida, algunos resultados de dichas investigaciones se describieron en el marco teórico de este documento, se revisaron los contenidos de los programas de estudio de la unidad de aprendizaje de cálculo de las ingenierías del Instituto Politécnico Nacional y, por último, se hizo una revisión de los libros de texto propuestos en la Escuela Superior de Cómputo, en la unidad de aprendizaje de cálculo.

Como señalamos con anterioridad, el estudio para la enseñanza del concepto de integral está planeado en cuatro semanas. Antes del inicio de las actividades se realizarán dos acciones, cuyos resultados presentaremos en otro momento, sin embargo, nos parece importante mencionarlas porque contribuyen significativamente en el desarrollo de la investigación. La primera acción es la aplicación de un cuestionario diagnóstico para identificar los conocimientos previos de los estudiantes; la segunda es un taller del uso del *software* Mathematica, con el objetivo de que los estudiantes instrumentalicen esta herramienta y la usen en el desarrollo de las actividades diseñadas para el estudio del concepto de integral definida.

Impacto y resultados

Resultado

Como resultado del análisis teórico, se identificaron los elementos matemáticos que configuran el concepto de integral definida y se propuso una descomposición genética de dicho concepto. En la construcción de un esquema para el concepto de integral definida planteamos dos caminos relacionados que deben ser recorridos y coordinados: un camino gráfico y un camino analítico. Estos son indicados en los siguientes pasos:

Gráfico

La acción de hacer particiones de un intervalo (dominio restringido de una función) para construir subintervalos.

La acción de identificar puntos sobre la gráfica de una función, cuya variable independiente corresponda a los elementos de la partición.

La acción de construir la gráfica de una función escalonada usando los puntos identificados en 1b).

La acción de construir rectángulos usando la función escalonada hecha en 1c).

Analítico

La acción de calcular los valores de los elementos de la partición (los valores de los extremos de los subintervalos).

La acción de calcular los valores de la función correspondiente a los elementos de la partición.

La acción de calcular el ancho de cada subintervalo.

La acción de calcular el producto de los valores obtenidos en 2b) y 2c).

La acción de acumular los valores obtenidos en 2d).

Gráfico

Interiorización de las acciones en el punto 1a) a un sólo proceso cuando el número de subintervalos varía.

Interiorización de las acciones en el punto 1b) a un sólo proceso cuando se identifican todos los puntos sobre la gráfica correspondientes a los elementos de la partición al variar el número de subintervalos.

Interiorización de las acciones en el punto 1c) a un sólo proceso cuando el número de escalones varía.

Interiorización de las acciones en el punto 1d) a un sólo proceso cuando se construyen n rectángulos usando n escalones.

Analítico

La interiorización de las acciones en el punto 2a) a un sólo proceso cuando el número de elementos de la partición varía.

La interiorización de las acciones en el punto 2b) a un sólo proceso cuando se determina la imagen de todos los elementos de la partición al variar el número de elementos de la partición.

La interiorización de las acciones en el punto 2c) a un sólo proceso cuando el ancho de los subintervalos varía.

La interiorización de las acciones en el punto 2d) a un sólo proceso cuando el ancho de los subintervalos varía.

La interiorización de las acciones en el punto 2e) a un sólo proceso expresándolo como una sumatoria de *n* elementos.

Gráfico

La interiorización de las acciones a un sólo proceso cuando coordina las acciones interiorizadas en el punto 3) e identifica el k-ésimo rectángulo construido cuando el número de elementos de la partición es *n*.

Analítico

La interiorización de las acciones a un sólo proceso cuando coordina las acciones interiorizadas en el punto 4) y calcula las dimensiones k-ésimo rectángulo construido cuando el número de elementos de la partición es *n*.

La encapsulación de los procesos 5) y 6) cuando concibe las cantidades que se acumulan creadas por pedacitos incrementales que se forman multiplicativamente para producir una aproximación al valor total acumulado.

La interiorización de la acción del paso 7) cuando produce mejores aproximaciones al valor total acumulado cuando *n* crece.

La coordinación de los procesos en los puntos 7) y 8) para determinar la aproximación al valor total acumulado en diferentes situaciones.

La interiorización de la acción de producir una aproximación al valor total acumulado en el intervalo [a,x] en el proceso de una función f(x), la cual toma como entrada el extremo derecho del subintervalo y produce como salida el valor aproximado de la cantidad total acumulada f(x) en el intervalo [a,x].

La encapsulación de los procesos en el punto 9) para producir una aproximación a la función de acumulación como un objeto.

Como resultado de la descomposición genética propuesta, se ha diseñado una serie de actividades para el estudio del concepto de integral definida.

A continuación presentamos las actividades propuestas para las primeras semanas de la aplicación de la investigación. Cada semana se llevarán a cabo dos sesiones en el laboratorio de computación. En la primera sesión se presentan dos actividades: una en el contexto matemático y otra en el contexto de la física; en la segunda, el profesor organiza una discusión dirigida en la que retoma los resultados obtenidos en la primera y los resultados de las actividades extraclase.

Cada semana se realizan dos actividades extraclase, la primera está enfocada a que los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos en la primer sesión y la segunda a que reflexionen sobre algún aspecto en particular, esta reflexión la comparten con sus compañeros en un foro de discusión.

Semana I

Objetivo: comenzar a reflexionar sobre la relación que existe entre la razón de cambio de una cantidad y la cantidad misma, mediante el desarrollo de funciones de acumulación a partir de una función de razón de cambio constante.

Para alcanzar el objetivo anterior, se presentan a los estudiantes situaciones (cercanas al estudiante) que permitan establecer la relación entre una cantidad y la razón de cambio de esa cantidad. Consideramos, por ejemplo, que la velocidad (razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo) es una situación cercana al estudiante porque son situaciones que vive cuando camina o viaja en algún medio de transporte (bicicleta, motocicleta, automóvil, metro, etcétera).

Contexto de la situación: durante las vacaciones de verano de 2013, la familia López (Juan–padre–, María –madre– y Pedro –hijo–) realizó un recorrido turístico por la ruta Maya. Durante el viaje, la velocidad del automóvil de la familia tuvo varios cambios debido a diferentes causas (tráfico, estado de la carretera, cargar gasolina, condiciones climatológicas, etc.). Lo anterior ocasionó que algunas veces fueran más rápido y otras más lento, algunas con velocidad constante e, incluso, otras en que se tuvieron que detener.

Sesión 1: Las actividades planteadas en esta sesión están centradas en dos ideas, la primera es la de partición (en el nivel numérico o analítico) de un intervalo y la segunda es la idea de acumulación de una función con razón de cambio constante. Las actividades de esta sesión están relacionadas con los pasos 2), 4) y 6) de la descomposición genética.

Episodio 1.1: Acumulación generada por una función constante

Tiempo de duración: 30 – 45 minutos

La actividad planteada en este episodio está dada en un contexto matemático-algebraico. El objetivo es, por un lado, que los estudiantes usen los comandos del *software* Mathematica (instrumentalización) y, por el otro, observar cómo los estudiantes pueden calcular la acumulación generada por una función constante dada en forma algebraica.

Actividad 1:

Divide el intervalo I=[1,5] en 4 subintervalos SI_i, determina la sucesión formada por los extremos de los subintervalos y calcula el ancho de cada subintervalo. Expresa la respuesta como una lista formada por los extremos de los subintervalos en orden creciente. Usa *h* para denotar el ancho de cada subintervalo.

El ancho de cada subintervalo es Δx, por razones prácticas, con el uso del Mathematica usaremos la letra *h* para indicar el ancho de cada subintervalo.

Se espera que los estudiantes:

- Usen el comando Table.
- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Table[i,\{i,1,5\}]}$ para generar el conjunto de elementos formado por los extremos de los cuatro subintervalos.
- Determinen que el ancho de cada subintervalo es h=1.

Divide el intervalo I=[1,5] en 16 subintervalos SI_i, determina la sucesión formada por los extremos de los subintervalos y calcula el ancho de cada subintervalo. Expresa la respuesta como una lista formada por los extremos de los subintervalos en orden creciente. Usa *h* para denotar el ancho de cada subintervalo.

Se espera que los estudiantes:

- Usen el comando Table.
- Generen una sucesión creciente de elementos.
- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Table}[\frac{4(i-1)}{16}+1,\{i,1{,}17\}]$ para generar el conjunto de elementos formado por los extremos de los dieciséis subintervalos.
- Determinen que el ancho de cada subintervalo es h=1/4.

Divide el intervalo I=[1,5] en 32 subintervalos SI_i, determina la sucesión formada por los extremos de los subintervalos y calcula el ancho de cada subintervalo. Expresa la respuesta como una lista formada por los extremos de los subintervalos en orden creciente. Usa h para denotar el ancho de cada subintervalo.

Se espera que los estudiantes:

- Usen el comando Table.
- Identifiquen que si se requieren 32 subintervalos el parámetro del comando Table se mueve de uno a 33.
- Se den cuenta que los extremos de los subintervalos dependen del ancho del intervalo y del número de subintervalos.
- Generen una sucesión creciente.
- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Table}[\frac{4(i-1)}{32} + 1, \{i, 1{,}33\}]$ para generar el conjunto de elementos formado por los extremos de los treinta y dos subintervalos.
- Determinen que el ancho de cada subintervalo es h=1/8.

Cambia el intervalo I=[1,5] por [0,2]. Divide el intervalo I=[0,2] en 32 subintervalos SI_i, determina la sucesión formada por los extremos de los subintervalos y calcula el ancho de cada subintervalo. Expresa la respuesta como una lista formada por los extremos de los subintervalos en orden creciente. Usa h para denotar el ancho de cada subintervalo. ¿De qué manera afecta este cambio a los valores del conjunto obtenido en el inciso c)? ¿De qué manera afecta este cambio a los valores de los elementos de la sucesión obtenida en el inciso c)?

Se espera que los estudiantes:

- Se den cuenta que los extremos de los subintervalos además de depender del número de subintervalos también depende de los extremos del intervalo.
- Se den cuenta que el ancho de los subintervalos depende del ancho del intervalo.

Define la función $f(x) = 8$ en el intervalo I=[1,5].
Construye una sucesión formada de la siguiente forma:
Primer elemento $f(1)h$, segundo elemento $f(1)h + f(1+h)h$, tercer elemento $f(1)h + f(1+h)h + f(1+2h)h$, cuarto elemento $f(1)h + f(1+h)h + f(1+2h)h + f(1+3h)h$, y así sucesivamente, hasta que $1 + nh = 5$, donde $h = \frac{1}{4}$. Expresa la respuesta como una lista de elementos. Explica qué significado tienen los valores de los elementos de la sucesión.

Se espera que los estudiantes:

- Usen el comando Table.
- Se den cuenta que para generar el siguiente elemento de la sucesión necesitan conocer el anterior.
- Se den cuenta que pueden usar el símbolo de sumatoria donde el índice superior varía de uno a dieciséis.
- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Table}\left[\sum_{i=1}^{n} f[1+(i-1)\frac{1}{4}]\frac{1}{4},\{n,1{,}16\}\right]$ para generar una sucesión de acumulaciones.
- Den explicaciones en términos de áreas de rectángulos.

Generaliza el procedimiento usado en el inciso e) para generar los extremos de *n* subintervalos del intervalo I=[a,b] y determina la sucesión de acumulaciones para diferentes valores de a, b y n. Explica qué significado tienen los valores de los elementos de la sucesión.

Se espera que los estudiantes:

- Usen parámetros a y b para los extremos del intervalo y *n* para el número de subintervalos.
- Usen el comando Table para generar los extremos de los subintervalos.
- Determinen el ancho del intervalo de la forma $\frac{b-a}{n}$
- Usen el comando Manipulate para variar los valores de los parámetros.
- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Manipulate}[\mathbf{Table}[(b-a)\,(i-1)/n+a,\{i,1,n+1\}],\{\{a,0\},-3{,}3{,}1\},\{\{b,1\},-2{,}5{,}1\},\{\{n,1\},1{,}16{,}1\}]$.
- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Manipulate}[\mathbf{Table}[\sum_{i=1}^{m} f[a+(m-1)\frac{b-a}{n}]\frac{b-a}{n},\{m,1,n\}],\{\{a,1\},-3{,}3{,}1\},\{\{b,5\},-2{,}5{,}1\},\{\{n,16\},1{,}50{,}1\}]$ para generar las acumulaciones.

Episodio 1.2: Velocidad constante

Tiempo de duración: 30 – 45 minutos

La actividad planteada en este episodio está dada en el contexto físico-numérico. El objetivo es observar, por un lado, cómo los estudiantes usan el *software* Mathematica en el proceso de solución del problema (instrumentación) y, por el otro, identificar las relaciones que los estudiantes establecen al determinar una expresión para calcular la acumulación (desplazamiento) generada por una función (razón de cambio constante: velocidad) dada en forma numérica.

Actividad 2:
Durante una de las horas de viaje, Pedro registra la velocidad (la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo) a la que viaja su papá cada 10 minutos durante una hora. Sea t=0 el momento en que Pedro empezó a hacer el registro.

Tiempo (min)	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*
Velocidad (km/h)	60	60	60	60	60	60	60

Tabla 1: Velocidad constante

Usa la tabla de la velocidad del automóvil de la familia López para responder las siguientes cuestiones.

Dibuja la gráfica de la velocidad del automóvil de la familia López.

Se espera que los estudiantes:

- Usen el comando ListPlot
- Escriban en Mathematica

$\boldsymbol{ListPlot}[\{\frac{1}{6},60\},\{\frac{2}{6},60\},\{\frac{3}{6},60\},\{\frac{4}{6},60\},\{\frac{5}{6},60\},\{1,60\}]$ para graficar los datos registrados.

Escribe una expresión que relacione la velocidad con el tiempo, suponiendo que el vehículo lleva la misma velocidad entre cada registro (sólo considere el tiempo en el que Pedro registró la velocidad del automóvil). Calcula la velocidad del automóvil de la familia López a los 5, 10, 15, 25 y 35 minutos de viaje.

Se espera que los estudiantes:

- Definan una función f en Mathematica como $v[x]:=60$
- Se den cuenta que necesitan convertir los minutos a horas para calcular la velocidad a los 5, 10, 15, 25 y 35.
- Evalúen funciones en Mathematica de la forma $v\left[\frac{1}{12}\right]$, $v\left[\frac{1}{6}\right]$, $v\left[\frac{3}{12}\right]$, $v\left[\frac{5}{12}\right]$ y $v\left[\frac{7}{12}\right]$.

Suponga que el automóvil de la familia López se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento s=f(t), donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del automóvil respecto del origen, en el instante t. Encuentra el desplazamiento del automóvil de la familia López durante el tiempo en que Pedro hizo el registro. Halla la distancia recorrida por el automóvil durante ese periodo.

Se espera que los estudiantes:

- Calculen la distancia que recorrió el automóvil después de una hora de viaje de la forma distancia= f(1)=v(1)* (1).
- Se den cuenta de que el desplazamiento y la distancia son iguales porque la velocidad es positiva durante el tiempo en el que Pedro hizo el registro.

Determina el desplazamiento del automóvil de la familia López cada 10 minutos.

[0,10], [10,20], [20,30], [30,40], [40,50] y [50,60].

Se espera que los estudiantes:

- Usen el comando Table.
- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Table}[v\left[(i-1)\frac{1}{6}\right]\frac{1}{6},\{i,1,6\}]$ para calcular la distancia recorrida por el automóvil cada 10 minutos durante esa hora de viaje.

Construye una sucesión de elementos que indique el desplazamiento del automóvil de la familia López los primeros cinco minutos, los primeros 10 minutos, los primeros 15 minutos y así sucesivamente, hasta determinar el desplazamiento del automóvil durante esa hora de viaje. [0,5], [0,10], [0,15], [0,20], [0,25], [0,30], [0,35], [0,40], [0,45], [0,50], [0,55] y [0,60].

Se espera que los estudiantes:

- Usen el comando Table.
- Usen la notación de sumatoria para calcular la distancia recorrida por el automóvil los primeros 5, 10, 15, 20… y 60 minutos de viaje.
- Escriban en Mathematica $\mathbf{Table}[\sum_{i=1}^{n} v[(i-1)\frac{1}{12}]\frac{1}{12},\{n,1,12\}]$ para generar el conjunto de distancia recorrida después de 5, 10, 15, 20… minutos de viaje.

Dibuja la gráfica de desplazamiento (en kilómetros) correspondiente al extremo derecho de cada subintervalo obtenido en el inciso e). ¿Conoces alguna función parecida a la obtenida en la gráfica?, ¿cuál?

Se espera que los estudiantes:

- Se den cuenta que necesitan un conjunto de pares ordenados para graficar el valor acumulado correspondiente al extremo derecho de cada subintervalo.
- Usen el comando Table.
- Escriban en Mathematica $\mathrm{Table}[\{n\frac{1}{12},\sum_{i=1}^{n} v[(i-1)\frac{1}{12}]\frac{1}{12}\},\{n,1{,}12\}]$ para generar el conjunto de pares ordenados.
- Usen el comando ListPlot para graficar el conjunto de pares ordenados.
- Identifiquen la función f (t)=60t.

Explica, usando la respuesta del inciso e), cómo calcularías el desplazamiento del automóvil de la familia López durante el primer minuto de viaje, durante el segundo minuto y así sucesivamente hasta determinar el desplazamiento del automóvil de la familia López durante esa hora de viaje.

Se espera que los estudiantes:

- Se den cuenta que necesitan dividir el intervalo de una hora en 60 subintervalos.
- Que determine que el ancho de cada subintervalo es $\frac{1}{60}$.
- Que pueden usar la expresión $\sum_{i=1}^{n} v[(i-1)\frac{1}{60}]\frac{1}{60}$ para obtener las acumulaciones.

Determina una expresión que te permita calcular el desplazamiento del automóvil de la familia López durante el primer minuto de viaje, durante el segundo minuto y así sucesivamente y explica cómo la obtienes. Grafica la expresión encontrada. ¿Conoces alguna función parecida a la obtenida en la gráfica?, ¿cuál?

Se espera que los estudiantes:

- Usen el comando Table.
- Escriban en Mathematica $\mathrm{Table}[\{n\frac{1}{60},\sum_{i=1}^{n} v[(i-1)\frac{1}{60}]\frac{1}{60}\},\{n,1{,}60\}]$ para generar el conjunto de pares ordenados.

- $d[\text{x\_}]:=\sum_{i=1}^{60x} v[(i-1)\frac{1}{60}]\frac{1}{60}$
- Usen el comando ListPlot para graficar el conjunto de pares ordenados.
- Identifique la función f (t)=60t.

Describe la relación entre la gráfica de la velocidad (razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo) y la gráfica del desplazamiento.

Describe la relación entre la expresión del desplazamiento y la expresión de la velocidad.

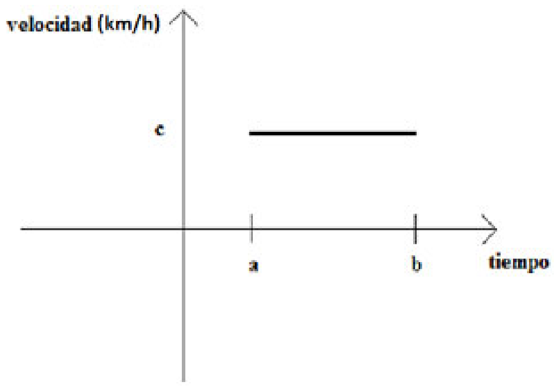
¿Cuál es la razón de cambio del desplazamiento del automóvil respecto al tiempo?

Ejercicio extra clase 1: las actividades extraclase planteadas se basan en un intervalo genérico [a,b] y se les pide que generen *n* subintervalos, lo que implica interiorizar en un proceso las acciones de mostrar numéricamente un conjunto ordenado de valores, dividir gráficamente un intervalo en *n* partes y después generalizar la idea de acumulación de cantidades, formadas multiplicativamente, por dos medidas constantes. Esta actividad está relacionada con los pasos 1), 2), 3), 4), 5) y 6) de la descomposición genética.

Episodio E1.1: velocidad constante (gráfica)

La actividad planteada en este episodio está dada en el contexto físico-gráfico. El objetivo es observar, por un lado, cómo los estudiantes usan el *software* Mathematica en el proceso de solución del problema (instrumentación) y, por el otro, si los estudiantes logran determinar una expresión para calcular la acumulación generada por una función constante dada en forma gráfica.

Actividad 3:
En la Gráfica 1 se muestra la velocidad del automóvil de la familia López en el intervalo de tiempo [a,b].



Gráfica 1. Velocidad constante

Usa la gráfica de la velocidad del automóvil de la familia López para responder las siguientes cuestiones.

Escribe una expresión que relacione la velocidad con el tiempo.

Se espera que los estudiantes:

- Definan la función v(x) = c
- Escriban en Mathematica $v[\mathrm{x\_}] := c$

Determina el desplazamiento del automóvil durante el intervalo de tiempo [a,b].

Se espera que los estudiantes:

- Calculen $v(a)(b-a)$
- Escriban en Mathematica $v[a](b-a)$

Divide el intervalo [a,b] en 32 subintervalos y determina la sucesión formada por el desplazamiento del automóvil en cada uno de esos subintervalos de tiempo.

Se espera que los estudiantes:

- Usen el comando Table. Generen una sucesión creciente de elementos.
- Determinen que el ancho de cada subintervalo es $\frac{b-a}{32}$

- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Table}[a+(i-1)\frac{1}{32},\{i,1{,}33\}]$ para generar el conjunto de elementos formado por los extremos de los treinta y dos subintervalos.
- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Table}[v[a+(i-1)\frac{1}{32}],\{i,1{,}32\}]$ para generar el conjunto de elementos formado por la distancia recorrida por el automóvil de la familia López en cada uno de los treinta y dos subintervalos.

Divide el intervalo [a,b] en 64 subintervalos y determina la sucesión formada por el desplazamiento del automóvil entre a y el extremo derecho de cada subintervalo.

Se espera que los estudiantes:

- Usen el comando Table. Generen una sucesión creciente de elementos.
- Determinen que el ancho de cada subintervalo es $\frac{b-a}{64}$
- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Table}[a+(i-1)\frac{b-a}{64},\{i,1{,}65\}]$ para generar el conjunto de elementos formado por los extremos de los treinta y dos subintervalos.
- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Table}[v[a+(i-1)\frac{b-a}{64}],\{i,1{,}64\}]$ para generar el conjunto de elementos formado por la distancia recorrida por el automóvil de la familia López en cada uno de los treinta y dos subintervalos.
- Escriban en Mathematica $\boldsymbol{Table}[\sum_{i=1}^{n} v[a+(i-1)\frac{b-a}{64}]\frac{b-a}{64},\{n,1{,}64\}]$ para generar el conjunto de elementos formado por la distancia recorrida por el automóvil de la familia López *a* y el extremo derecho de cada subintervalo.

Explica cómo obtendrías el desplazamiento del automóvil entre *a* y el extremo derecho de cada subintervalo si divides el intervalo dado en *n* subintervalos.

Se espera que los estudiantes:

- Se den cuenta que el ancho de cada subintervalo es $\frac{b-a}{n}$
- Que las distancias se van acumulando.
- Que la expresión $\sum_{i=1}^{n} n[a+(i-1)\frac{b-a}{n}]\frac{b-a}{n}$ da la distancia acumulada en *n* subintervalos.

Usa parámetros para calcular el desplazamiento del automóvil entre *a* y el extremo derecho de cada subintervalo para diferentes valores de *n*.

Se espera que los estudiantes:

- Usen el comando Manipulate para variar los parámetros a, b y n.
- Escriban en Mathematica:

$$\boldsymbol{Manipulate}[\boldsymbol{Table}[\sum_{i=1}^{m} v[a+(i-1)\frac{b-a}{n}]\frac{b-a}{n}, \{m,1,n\}], \{\{n,1\},1,64,1\}]$$

Para generar el conjunto de distancias entre a y el extremo derecho de cada subintervalo para diferentes valores de n.

$$\boldsymbol{Manipulate}[\boldsymbol{Table}[\sum_{i=1}^{m} f[a+(i-1)\frac{b-a}{n}]\frac{b-a}{n}, \{m,1,n\}], \{\{n,1\},1,64,1\}, \{\{b,1\},-2,2,1\}, \{\{a,0\},-3,3,1\}]$$

Para generar el conjunto de distancias entre a y el extremo derecho de cada subintervalo para diferentes valores de a, b y n.

Grafica el desplazamiento del automóvil para $v_1(x) = 90$ (kilómetros por hora) en los siguientes intervalos $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $I = \left[1, \frac{3}{2}\right]$ y $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ (en horas) para diferentes valores de n. Describe la relación entre la gráfica del desplazamiento y la gráfica de la velocidad. ¿Conoces alguna función parecida a la obtenida?, ¿cuál? Explica cómo sería la gráfica del desplazamiento en el intervalo $I = [a, b]$.

Se espera que los estudiantes:

- Se den cuenta que para poder graficar necesitan parejas ordenadas.
- Se den cuenta que el primer elemento de las parejas ordenadas es el extremo derecho de cada subintervalo y el segundo elemento es la acumulación generada hasta ese subintervalo.
- Usen el comando Manipulate para generar el conjunto de parejas ordenadas para diferentes valores de a, b y n.
- Escriban en Mathematica:

- $\text{Manipulate}[\text{Table}[\{a + m\frac{b-a}{n}, \sum_{i=1}^{m} \text{v1}[a + (i-1)(b - a)\frac{1}{n}]\frac{b-a}{n}\}, \{m, 1, n\}], \{\{n, 1\}, 1, 64, 1\}, \{\{b, 1\}, -2, 2, 1\}, \{\{a, 0\}, -3, 3, 1\}]$

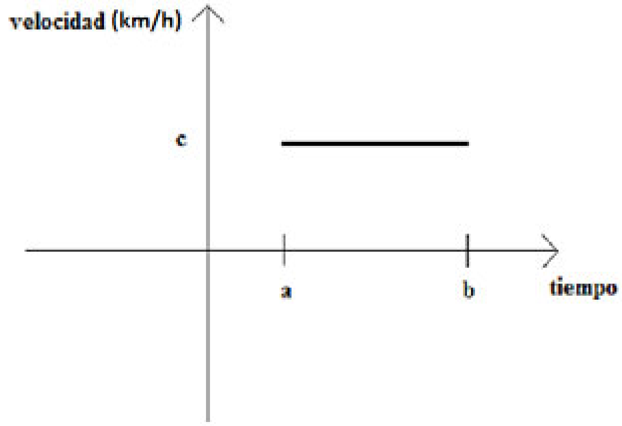
¿Cuál es la razón de cambio del desplazamiento obtenido en el inciso g) en los siguientes intervalos $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $I = \left[1, \frac{3}{2}\right]$ y $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$?

Episodio E1.2:

La actividad planteada en este episodio tiene como objetivo propiciar que los estudiantes reflexionen sobre la forma de generalizar la idea de acumulación de cantidades, formadas multiplicativamente, por dos medidas constantes; mediante la participación en un foro de discusión. El foro propuesto tiene la siguiente característica: para que los estudiantes puedan revisar los comentarios de sus compañeros primero tienen que hacer sus propias aportaciones.

Actividad 4:
Participación en el foro 1.

En relación con la gráfica



Gráfica 2. Velocidad constante de un automóvil

Explica a tus compañeros cómo obtendrías la distancia recorrida por el automóvil de la familia López entre *a* y el extremo derecho de cada subintervalo si divides el intervalo [a,b] en *n* subintervalos.

Lee la explicación dada por tus compañeros y haz comentarios sobre ello.

Sesión 2:
La actividad de esta sesión tiene como objetivo observar cómo usan los estudiantes la idea de partición a un nivel gráfico para una partición fija (pasos 1 y 2: partición y acumulación a nivel de acción) y para una partición con *n* elementos (pasos 3 y 4: partición y acumulación a nivel de proceso) y, por último, cómo establecen una relación entre lo numérico (paso 6) y lo gráfico (paso 5), entendida como proceso al considerar un intervalo, una partición y una razón de cambio constante cualquiera (institucionalización del conocimiento).

Tiempo de duración: 90 minutos.

Actividad 5:
Discusión dirigida 1: este episodio inicia con una discusión guiada por el profesor, tomando algunos elementos relevantes de las soluciones de la actividad 3 y de las aportaciones de los estudiantes en el foro de discusión 1.

Con el desarrollo de estas actividades se busca que el estudiante, a través de acciones para casos específicos, reflexione sobre las mismas y las interiorice en procesos a los cuales se les pueden aplicar nuevas acciones y los encapsule en un todo para construir un objeto; en la primera semana, la integral definida de una función constante.

Se pretende avanzar en el desarrollo del concepto, comenzando con funciones constantes para así continuar con funciones escalonadas y, posteriormente, con funciones continuas, introduciendo en cada caso aplicaciones en diferentes contextos.

Conclusión

En el nivel superior no es suficiente que el estudiante sea hábil para aplicar reglas y algoritmos, se requiere que vaya más allá de la habilidad de realizar cálculos y que sea consciente de la forma en que los procedimientos funcionan, es por ello que hace necesario estrategias pedagógicas donde se favorezca el desarrollo conceptual. El diseño de actividades de aprendizaje para el estudio de un concepto donde se privilegie el desarrollo conceptual es una tarea que requiere una buena comprensión de la epistemología del concepto en cuestión, para lo cual se necesita del análisis de cómo los estudiantes están aprendiendo un concepto o cómo han aprendido el concepto. La descomposición genética propuesta en esta investigación constituye una herramienta que puede servir de apoyo para el diseño instruccional en el estudio de la integral definida, así como un instrumento de análisis que podría permitir al profesor identificar porqué un estudiante fue capaz de resolver un problema y porqué otro estudiante no lo consiguió, comparando las construcciones mentales que los estudiantes mostraron en el proceso de solución del problema.

El estudio del concepto de integral definida forma parte de los programas de cálculo a nivel universitario debido a su gran importancia en múltiples aplicaciones, por ejemplo, para calcular. Sin embargo, la experiencia muestra que los estudiantes no alcanzan a comprender este concepto de forma adecuada en su primer año en la universidad. Las herramientas y conceptos referentes a la integración definida se aprenden, en general, descontextualizados y desvinculados de otros contenidos, por ello los estudiantes se limitan a memorizar un conjunto de reglas y técnicas, las cuales serían más significativas si se estudiaran de forma contextualizada.

Referencias documentales

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 97-135.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). *A framework for research and development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education*, 2(3), 1-32.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.

Bezuidenhout, J. & Olivier, A. (2000). Student's conceptions of the integral. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, pp. 73-80.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 8(3), pp. 265-286.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, V. & Vidakovic, D. (2000) Calculus Students Intuition of Area and the Definite Integral: Chopping Up or Sweeping Out. *Collegiate Mathematics Journal*.

Dubinsky, E. & MacDonald, M. (2001). Apos: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level*: An ICMI Study, 273-280.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: and APOS analysis. Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 335-359.

Kouropatov, A. (2008). Approaches to the Integral Concept: The case of high school calculus. YESS, 4, 1-9.

Llorens-Fuster, J. L. & Santonja-Gómez, F. J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 5(1/2), 61-67.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3 (2), pp. 131-170.

Orton, A. (1983). Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp. 1-18.